Übungsblatt 5 zur Vorlesung “Topologie” im SS 16

Prof. V. Bangert **24. 5. 2016**

Schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Lösung. *Abgabe am 31. 5. vor Beginn der Vorlesung.*

Aufgabe 1.
Sei X topologischer Raum und $A \subset X$, $B \subset X$ seien zusammenhängend.

Zeigen Sie: Ist $A \cap B \neq \varnothing$, so ist $A \cup B$ zusammenhängend.
(Sie dürfen dabei nicht Satz (4.9)(a) benutzen, denn der Beweis von Satz (4.9)(a) beruht auf dieser Aussage.)

Aufgabe 2.
Zu einem topologischen Raum X bezeichne $\mathcal{Z}(X)$ die Menge der Zusammenhangskomponenten von X. Zeigen Sie:

a) Sei $f : X \to Y$ stetig. Ist $A \in \mathcal{Z}(X)$, so existiert genau ein $\tilde{A} \in \mathcal{Z}(Y)$ mit $f(A) \subset \tilde{A}$. Das definiert eine Abbildung $\mathcal{Z}(f) : \mathcal{Z}(X) \to \mathcal{Z}(Y)$.

b) Sind $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ stetig, so gilt $\mathcal{Z}(g \circ f) = \mathcal{Z}(g) \circ \mathcal{Z}(f)$.

c) Ist $h : X \to Y$ Homöomorphismus, so ist $\mathcal{Z}(h) : \mathcal{Z}(X) \to \mathcal{Z}(Y)$ Bijektion.

Aufgabe 3.

a) Seien X, Y topologische Räume, $h : X \to Y$ Homöomorphismus und sei $x \in X$.
Zeigen Sie: $\tilde{h} : X \backslash \{x\} \to Y \backslash \{h(x)\}$, definiert durch $\tilde{h}(z) := h(z)$ für alle $z \in X \backslash \{x\}$, ist ein Homöomorphismus.

b) Zeigen Sie: Das Intervall $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ und die Kreislinie
$$S^1 := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\right\}$$
sind nicht homöomorph.

Hinweis: Sie können Aufgabe 2, c) benützen.

Aufgabe 4.
Es sei X der durch
$$X = \left\{ r(\cos\varphi, \sin\varphi) \;\middle|\; 0 \leq r \leq 1,\ \varphi \in \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} \right\}$$
gegebene Unterraum des $\mathbb{R}^2$.

a) Skizzieren Sie X.

b) Zeigen Sie, dass X wegzusammenhängend ist.

c) Zeigen Sie, dass X nicht lokal zusammenhängend ist.