Übungsblatt 6 zur Vorlesung "Topologie" im SS 16

Prof. V. Bangert **31. 5. 2016**

Schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Lösung. *Abgabe am 7. 6. vor Beginn der Vorlesung.*

Aufgabe 1. *Das Cantorsche Diskontinuum.* (6 Punkte)

Ist $T = [a,b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall, so sei $T' := [a, \frac{2a+b}{3}] \cup [\frac{a+2b}{3}, b]$, d. h., T' entsteht aus T durch Wegnahme des offenen mittleren Drittels $(\frac{2a+b}{3}, \frac{a+2b}{3})$. Diese Operation kann auf Vereinigungen $S = S_1 \cup ... \cup S_n$ von endlich vielen disjunkten abgeschlossenen Intervallen S_i fortgesetzt werden durch $S' := S_1' \cup ... \cup S_n'$.

Beginnend mit $T_0 := [0,1]$ definieren wir induktiv

$$T_1 := T_0' = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right],\ T_2 := T_1' = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right],\ \dots,\ T_{n+1} = T_n'.$$

Die Menge $\mathbb{D} := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} T_n$ heißt *Cantorsches Diskontinuum* oder *Cantormenge.*

Wie in Blatt 3, Aufgabe 3 (b) sei $X_n = \{0,1\}$ für $n \in \mathbb{N}$ mit der diskreten Topologie und $X := \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ mit der Produkttopologie versehen, und $g : X \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x_n}{3^n}$.

Zeigen Sie:

a) $\mathbb{D}$ ist abgeschlossen.

b) Für kein Intervall $\varnothing \neq (a,b) \subset [0,1]$ gilt $(a,b) \subset \mathbb{D}$.

c) g ist ein Homöomorphismus von X auf $\mathbb{D}$.

d) Jeder Punkt $t \in \mathbb{D}$ ist Limes einer Folge von Punkten $t_n \in \mathbb{D}$ mit $t_n \neq t$.

Aufgabe 2. (2 Punkte)

Zeigen Sie: Ein topologischer Raum X ist genau dann hausdorffsch, wenn die Diagonale $\Delta := \{(x,x) \mid x \in X\}$ im Produktraum $X \times X$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 3. (6+2 Punkte)

Sei X ein T_1-Raum, $x \in X$. Auf der Menge

$$F_x := \{f : U \to \mathbb{R} \mid x \in U \subset X \text{ offen }, f \text{ stetig } \}$$

definieren wir eine Äquivalenzrelation $\sim_x$ durch:

$$f_1 \sim_x f_2 \Longleftrightarrow f_1 \text{ und } f_2 \text{ stimmen auf einer Umgebung von x überein.}$$

$G_x := F_x / \sim_x$ bezeichne die Menge der Äquivalenzklassen und $\gamma_x : F_x \to G_x$ die Projektion, d. h., $\gamma_x(f) = \{h \in F_x \mid h \sim_x f\}$. $\gamma_x(f)$ heißt der *Keim von f in x*. $G := \bigcup_{x \in X} G_x$ heißt die *Garbe der Keime stetiger Funktionen.*

a) Zeigen Sie: Die G_x sind paarweise disjunkt.

Wir können deshalb $\pi : G \to X, \pi(g) = x \Leftrightarrow g \in G_x$, definieren.

Ist $U \subset X$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ stetig, so sei $B_f := \{\gamma_x(f) \mid x \in U\} \subset G$.

Zeigen Sie:

b) $\mathcal{B} := \{B_f \mid U \subset X \text{ offen}, f : U \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}$ ist Basis einer Topologie $\mathcal{O}$ auf G.

c) π ist bzgl. $\mathcal{O}$ ein lokaler Homöomorphismus (d. h., für alle $g \in G$ existieren Umgebungen V von g in G und U von $\pi(g)$ in X, so dass $\pi|_V : V \to U$ ein Homöomorphismus ist).

d) Ist $X = \mathbb{R}^n$, so ist $(G, \mathcal{O})$ nicht hausdorffsch. (Anleitung: Betrachten Sie etwa im Fall $X = \mathbb{R}$ die Keime von f und h in $x = 0$, wobei $f \equiv 0$ und $h(x) = 0$, falls $x \leq 0$, $h(x) = x$, falls $x \geq 0$.)

*e) Definiert man analog (im Fall $X = \mathbb{R}^n$) die *Garbe $G(C^\omega)$ der Keime reell-analytischer Funktionen*, indem man überall "stetig" durch "reell-analytisch" ersetzt, so ist $(G(C^\omega), \mathcal{O})$ hausdorffsch.