Übungsblatt 7 zur Vorlesung “Topologie” im SS 16

Prof. V. Bangert **7. 6. 2016**

Schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Lösung. *Abgabe am 14. 6. vor Beginn der Vorlesung.*

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Sei $f_n : X \to \mathbb{R}$ eine Folge von (nicht notwendig stetigen) Funktionen, die gleichmäßig gegen $f : X \to \mathbb{R}$ konvergieren (d.h. $\lim_{n\to\infty}(\sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)|) = 0$).
Zeigen Sie:

a) Existiert für jedes $x \in X$ eine Umgebung U von x, so dass $\lim_{n\to\infty}(\sup(f_n|_U) - \inf(f_n|_U)) = 0$ gilt, so ist f ist stetig.

*a) *Korrektur zu 1a):* Existiert für jedes $x \in X$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Umgebung U_n von x, so dass $\lim_{n\to\infty}(\sup(f_n|_{U_n}) - \inf(f_n|_{U_n})) = 0$ gilt, so ist f ist stetig.

b) Sind die Funktionen f_n stetig, so folgt direkt aus gleichmäßiger Konvergenz der f_n gegen f die Stetigkeit von f.

Hinweis: *a) ist eine allgemeine Version des Verfahrens, das im Beweis des Lemmas von Urysohn verwendet wurde.

Bemerkung: Die ursprüngliche Aufgabe 1a) ist zwar richtig, aber es folgt sogar, dass f lokal konstant ist.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Betrachte $S := [-1, 1] \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ mit der Unterraumtopologie. Sei $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ und die Relation $\sim$ durch

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) :\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 - f(x_1) = y_2 - f(x_2) & \text{falls } x_1, x_2 \in (-1, 1) \\ x_1 = x_2 & \text{falls } x_1, x_2 \in \{-1, 1\} \end{cases}$$

definiert.

a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf S definiert und skizzieren Sie S mit einigen Äquivalenzklassen.

b) Sei $\pi : S \to S/\sim$ die kanonische Projektion. Definiere die Quotiententopologie $\mathcal{O}(S/\sim)$ auf dem Quotienten $S/\sim$ durch

$$\mathcal{O}(S/\sim) := \{U \subset (S/\sim) \mid \pi^{-1}(U) \subset S \text{ ist offen in } S\}.$$

Zeigen Sie, dass $S/\sim$ mit der Quotiententopologie das Trennungsaxiom T_1, aber nicht das Trennungsaxiom T_2 erfüllt.

Aufgabe 3. *Zariski-Topologie* (6+2 Punkte)

Ein komplexes Polynom $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ ist eine Funktion der Gestalt

$$f(z) = f(z_1, ...z_n) = \sum_{i_1=0}^{k_1} ... \sum_{i_n=0}^{k_n} a_{i_1...i_n} z_1^{i_1} ... z_n^{i_n}$$

mit $k_1, ..., k_n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ und $a_{i_1...i_n} \in \mathbb{C}$. Sie können ohne Beweis annehmen: wenn für ein komplexes Polynom $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ eine offene Menge $\varnothing \neq U \subset \mathbb{C}^n$ existiert mit $f|_U \equiv 0$, so gilt $f \equiv 0$ auf $\mathbb{C}^n$.

Eine Menge $A \subset \mathbb{C}^n$ heißt *Zariski-abgeschlossen*, falls es eine Menge $\mathcal{P}$ von komplexen Polynomen gibt, so dass

$$A = N(\mathcal{P}) := \{z \in \mathbb{C}^n \mid \text{ für alle } f \in \mathcal{P} \text{ gilt } f(z) = 0\} \ \Big(= \bigcap_{f \in \mathcal{P}} f^{-1}(\{0\}) \Big)$$

gilt. $U \subset \mathbb{C}^n$ heißt *Zariski-offen*, falls $\mathbb{C}^n \backslash U$ Zariski-abgeschlossen ist.

a) Das System der Zariski-offenen Mengen ist eine Topologie auf $\mathbb{C}^n$.

b) Ist $\varnothing \neq U \subset \mathbb{C}^n$ Zariski-offen, so ist U offen und dicht in $\mathbb{C}^n$ bezüglich der üblichen Topologie auf $\mathbb{C}^n$.

c) $\mathbb{C}^n$ mit der Zariski-Topologie ist ein T_1-Raum. Sind $U, V \subset \mathbb{C}^n$ nichtleere Zariski-offene Mengen, so gilt $U \cap V \neq \varnothing$. Speziell erfüllt die Zariski-Topologie nicht das Trennungsaxiom T_2.

*d) Beweisen Sie die Annahme: wenn für ein komplexes Polynom $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ eine offene Menge $\varnothing \neq U \subset \mathbb{C}^n$ existiert mit $f|_U \equiv 0$, so gilt $f \equiv 0$ auf $\mathbb{C}^n$.

Aufgabe 4. (2 Punkte)

Seien X, Y topologische Räume, $f : X \to Y$ stetig. Ist X kompakt, so ist $f(X)$ (als Unterraum von Y) kompakt.