Übungsblatt 8 zur Vorlesung "Topologie" im SS 16

Prof. V. Bangert **14. 6. 2016**

Schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Lösung. *Abgabe am 21. 6. vor Beginn der Vorlesung.*

Aufgabe 1.
Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Zeigen Sie:
Zu jeder offenen Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ existiert eine Lebesgue-Zahl, d.h. ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in X$ ein $i \in I$ existiert mit $B(x, \delta) \subset U_i$.

Aufgabe 2.
Zeigen Sie: Ist (X, d) ein kompakter metrischer Raum, (Y, d') ein metrischer Raum und $f : X \to Y$ stetig, so ist f gleichmäßig stetig. D. h., für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $x, x' \in X$ mit $d(x, x') < \delta$ gilt $d'(f(x), f(x')) < \varepsilon$.

Aufgabe 3.
Zeigen Sie:

a) Ist X topologischer Raum, $\mathcal{B}$ Basis seiner Topologie und besitzt jede Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von X mit $U_i \in \mathcal{B}$ für alle $i \in I$ eine endliche Teilüberdeckung, so ist X kompakt.

b) Sind X, Y kompakte topologische Räume, so ist $X \times Y$ mit der Produkttopologie kompakt.

Anleitung: Wegen a) genügt es zu zeigen: Ist $(U_i \times V_i)_{i\in I}$ Überdeckung von X, wobei alle U_i offen in X, alle V_i offen in Y sind, so existiert eine endliche Teilüberdeckung. Zeige zunächst mit der Kompaktheit von Y: Für alle $x \in X$ existiert eine Umgebung U_x von x in X und eine endliche Teilmenge $E_x \subset I$ mit $U_x \times Y \subset \bigcup_{i\in E_x}(U_i \times V_i)$.

Aufgabe 4.
Auf $X = \mathbb{R} \times \{-1, 1\} \subset \mathbb{R}^2$ betrachten wir die Äquivalenzrelation $\sim$, für die für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gilt $(x, -1) \sim (x, 1)$, und für die das die einzigen verschiedenen äquivalenten Punkte sind. Es sei $Y := X/\!\sim$, $\pi : X \to Y$ die kanonische Projektion und Y sei mit der Quotiententopologie versehen. Zeigen Sie:

a) Y ist nicht hausdorffsch.

b) $\pi : X \to Y$ ist stetig und offen.

c) $\pi|_{\mathbb{R}\times\{1\}} : \mathbb{R} \times \{1\} \to Y\backslash\{\pi((0, -1))\}$ und $\pi|_{\mathbb{R}\times\{-1\}} : \mathbb{R} \times \{-1\} \to Y\backslash\{\pi((0, 1))\}$ sind Homöomorphismen.

d) $\pi([-1, 1] \times \{1\}) =: K_1$ und $\pi([-1, 1] \times \{-1\}) =: K_{-1}$ sind kompakt, während $K_1 \cap K_{-1}$ nicht kompakt ist.

Lösung 1.

Sonst existiert für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in X$, so dass für kein $i \in I$ gilt: $B(x_n, \frac{1}{n}) \subset U_i$. Da (X, d) folgenkompakt ist, existiert eine Teilfolge $(x_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} x_{n(k)} = x \in X$. Da $\bigcup_{i\in I} U_i = X$ gilt, existiert ein $i \in I$ mit $x \in U_i$. Da U_i offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B(x, \varepsilon) \subset U_i$. Man kann (wegen $\lim_{k\to\infty} n(k) = \infty$) ein $k \in \mathbb{N}$ wählen, so dass $\frac{1}{n(k)} < \frac{\varepsilon}{2}$ und $d(x_{n(k)}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ gilt. Ist $y \in B(x_{n(k)}, \frac{1}{n(k)})$, so gilt $d(y, x) \leq d(y, x_{n(k)}) + d(x_{n(k)}, x) < \varepsilon$, d.h. $B(x_{n(k)}, \frac{1}{n(k)}) \subset B(x, \varepsilon) \subset U_i$, im Widerspruch zur Wahl von x_n.

Lösung 2.

Sonst existiert $\varepsilon > 0$ und Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X mit $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$ und $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da X folgenkompakt ist, existiert Teilfolge $(x_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen ein $x \in X$ konvergiert. Dann gilt auch $\lim_{k\to\infty} y_{n(k)} = x$. Da f stetig ist, folgt $\lim_{k\to\infty} f(y_{n(k)}) = f(x) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n(k)})$, in Widerspruch zu $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung 3.

a) Sei $(V_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X. Da $\mathcal{B}$ eine Basis ist, existiert zu jedem $x \in X$ ein $i \in I$ und ein $B_x \in \mathcal{B}$ mit $x \in B_x \subset V_i$. Dann ist $(B_x)_{x\in X}$ eine offene Überdeckung von X mit $B_x \in \mathcal{B}$ für alle $x \in X$. Nach Voraussetzung existieren endlich viele $x_1, ..., x_n \in X$ mit $\bigcup_{k=1}^n B_{x_k} = X$. Nach Konstruktion existiert für jedes $k \in \{1, ..., n\}$ ein $i_k \in I$ mit $B_{x_k} \subset U_{i_k}$. Dann gilt $\bigcap_{k=1}^n U_{i_k} = X$.

b) Da $\{U \times V \mid U \text{ offen in } X, V \text{ offen in } Y\}$ eine Basis der Produkttopologie ist, genügt es nach 3a) für jede Überdeckung $(U_i \times V_i)_{i\in I}$ eine Überdeckung von $X \times Y$, für die alle U_i offen in X und alle V_i offen in Y sind, eine endliche Teilüberdeckung zu finden. Ist $x \in X$ so ist $\{x\} \times Y \subset X \times Y$ kompakt (da homöomorph zu Y). Deshalb existiert eine endliche Menge $E_x \subset I$ mit $\{x\} \times Y \subset \bigcup_{i\in E_x} (U_i \times V_i)$. Wir können annehmen, das für alle $i \in E_x$ gilt: $x \in U_i$ (denn sonst gilt $(U_i \times V_i) \cap (\{x\} \times Y) = \varnothing$). Dann gilt $x \in U_x := \bigcap_{i\in E_x} U_i$ und U_x ist offen, da E_x endlich ist. Ist $(\tilde{x}, y) \in U_x \times Y$, so existiert $i \in E_x$ mit $(x, y) \in U_i \times V_i$, also $(\tilde{x}, y) \in U_i \times V_i$. Daraus folgt $(U_x \times Y) \subset \bigcup_{i\in E_x} (U_i \times V_i)$. Da X kompakt ist, existieren $x_1, ..., x_n$ mit $\bigcup_{k=1}^n U_{x_k} = X$. Dann gilt für $E := \bigcup_{k=1}^n E_{x_k}$:

$$X \times Y \subset \bigcup_{k=1}^{n} (U_{x_k \times Y}) \subset \bigcup_{i\in E} (U_i \times V_i).$$

Lösung 4.

a) Es seien V_1, V_{-1} offene Umgebungen von $\pi((0,1))$ und $\pi((0,-1))$ in Y. Dann sind $\pi^{-1}(V_1)$ und $\pi^{-1}(V_{-1})$ offene Umgebungen von $(0,1)$ und $(0,-1)$ in X. Also ex. ein $\varepsilon > 0$, so dass $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \{1\} \subset \pi^{-1}(V_1)$ und $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \{-1\} \subset \pi^{-1}(V_{-1})$ gilt, speziell $\pi(\frac{\varepsilon}{2}, 1) \in V_1 \cap V_2$.

b) π ist stetig nach Def. der Quotiententopologie. $U \subset X$ ist genau dann offen, wenn $U \cap (\mathbb{R} \times \{1\})$ und $U \cap (\mathbb{R} \times \{-1\})$ offen in X sind. Es genügt also z.z.: Ist $V \subset \mathbb{R}$ offen, so sind $\pi(V \times \{1\})$ und $\pi(V \times \{-1\})$ offen in Y. Es gilt etwa: $\pi^{-1}(\pi(V \times \{1\})) = V \times \{-1, 1\}$ ist offen in X. Also ist $\pi(V \times \{1\})$ offen in Y.

c) $\pi|_{\mathbb{R}\times\{1\}} : \mathbb{R} \times \{1\} \to Y \backslash \{\pi((0,-1))\}$ ist bijektiv, stetig und offen, also ein Homöomorphismen.

d) Da $\pi([-1,1] \times \{1\}) \subset X \subset \mathbb{R}^2$ kompakt und π stetig ist, ist K_1 kompakt, ebenso K_{-1}. $K_1 \cap K_{-1} = \pi(([-1,1] \backslash \{0\}) \times \{1\})$ ist nicht kompakt, da $([-1,1] \backslash \{0\}) \times \{1\}$ nicht kompakt ist, $\pi|_{\mathbb{R}\times\{1\}} : \mathbb{R} \times \{1\} \to Y \backslash \{\pi((0,-1))\}$ ein Homöomorphismus ist und $\pi(([-1,1] \backslash \{0\}) \times \{1\}) = K_1 \cap K_{-1}$ gilt.