Übungsblatt 9 zur Vorlesung "Topologie" im SS 16

Prof. V. Bangert **21. 6. 2016**

Schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Lösung. *Abgabe am 28. 6. vor Beginn der Vorlesung.*

Aufgabe 1.
Sei $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum, (Y, d) metrischer Raum mit der induzierten Topologie $\mathcal{O}' := \mathcal{O}(d)$ und $f : X \to Y$ injektiv. Zeigen Sie:

a) Die Abbildung $f^*d : X \times X \to [0, \infty), f^*d(x_1, x_2) := d(f(x_1), f(x_2))$ ist ein Metrik auf X.

b) Ist f stetig (bzgl. $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}'$), so gilt $\mathcal{O}(f^*d) \subset \mathcal{O}$.

c) Ist $f^{-1} : f(X) \to X$ stetig (bzgl. $\mathcal{O}'_{f(X)}$ und $\mathcal{O}$), so gilt $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}(f^*d)$.

Aufgabe 2.
Ist X ein topologischer Raum, so heißt der topologische Raum

$$\Sigma X := \frac{X \times [-1, 1]}{X \times \{-1\}, X \times \{1\}}$$

die *Suspension* (oder Einhängung) von X. Zeigen Sie, dass ΣS^n zu S^{n+1} homöomorph ist.

Anleitung: Konstruieren Sie eine surjektive Abbildung $f : S^n \times [-1, 1] \to S^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$, die $S^n \times (-1, 1)$ homöomorph auf $S^{n+1} \backslash \{\pm e_{n+2}\}$ abbildet.

Aufgabe 3. 1-*Punkt-Kompaktifizierung des* $\mathbb{R}^n$

Es bezeichne $\mathcal{O}$ die übliche Topologie auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

a) Auf $X := \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ definiert $\tilde{\mathcal{O}} := \mathcal{O} \cup \{X \backslash K \mid K \subset \mathbb{R}^n \text{ kompakt}\}$ eine Topologie und $(X, \tilde{\mathcal{O}})$ ist kompakt.

b) Die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to S^n$,

$$f(x) = \frac{2}{\|x\|_2^2 + 1} \left(x, \frac{\|x\|_2^2 - 1}{2} \right) \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

lässt sich durch $f(\infty) := e_{n+1}$ zu einem Homöomorphismus von $(X, \tilde{\mathcal{O}})$ auf S^n fortsetzen.

Bemerkung: f ist die Umkehrabbildung der stereographischen Projektion

$$p : S^n \backslash \{e_{n+1}\} \to \mathbb{R}^n,\ p(y) = \frac{1}{1 - y_{n+1}}(y_1, ..., y_n).$$

Aufgabe 4. (2 Bonuspunkte)

a) Auf S^n betrachte die Äquivalenzrelation R_n mit den Äquivalenzklassen $[x]_{R_n} = \{x, -x\}$ für alle $x \in S^n$. Zeigen Sie, dass S^n/R_n (mit der Quotiententopologie) kompakt und hausdorffsch ist.

b) Der n-dimensionale reelle projektive Raum $\mathbb{R}P^n$ ist als der Quotientenraum von $\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$ nach der Äquivalenzrelation:

$$x \sim y \;\Leftrightarrow\; \exists \lambda \in \mathbb{R} : \; x = \lambda y$$

definiert. Zeigen Sie, dass die Inklusion $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$ einen Homöomorphismus $S^n/R_n \to \mathbb{R}P^n$ definiert.

*c) Sei $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leq 1\}$ und $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}P^{n-1}$ die Einschränkung der kanonischen Projektion $\pi_n : \mathbb{R}^n\backslash\{0\} \to \mathbb{R}P^{n-1}$ auf $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$.

Zeigen Sie: $\mathbb{R}P^{n-1} \cup_f D^n$ ist homöomorph zu $\mathbb{R}P^n$, d.h. $\mathbb{R}P^n$ entsteht aus $\mathbb{R}P^{n-1}$ durch Anheften der n-Zelle D^n mittels f.

Anleitung: Es sei $i : \mathbb{R}P^{n-1} \to \mathbb{R}P^n$ die von der Inklusion $x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\} \to (x, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$ induzierte Abbildung und $\tilde{F} : \mathbb{R}P^{n-1} \cup D^n \to \mathbb{R}P^n$ durch

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} i(x) & \text{falls } x \in \mathbb{R}P^{n-1} \\ \pi_{n+1}(x, \sqrt{1 - \|x\|_2^2}) & \text{falls } x \in D^n \end{cases}$$

definiert. $\tilde{F}$ induziert einen Homöomorphismus $F : \mathbb{R}P^{n-1} \cup_f D^n \to \mathbb{R}P^n$.

Lösung 1.

a) Da d eine Metrik auf Y ist, gilt für $x_1, x_2, x_3 \in X$:

- $f^*d(x_1, x_2) = d(f(x_1), f(x_2)) \geq 0$ und aus der Injektivität von f folgt $f^*d(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$.
- $f^*d(x_1, x_2) = d(f(x_1), f(x_2)) = d(f(x_2), f(x_1)) = f^*d(x_2, x_1)$
- $f^*d(x_1, x_3) = d(f(x_1), f(x_3)) \leq d(f(x_1), f(x_2)) + d(f(x_2), f(x_3)) = f^*d(x_1, x_2) + f^*d(x_2, x_3)$.

b) Eine Basis von $\mathcal{O}(f^*d)$ besteht aus allen Bällen $B_{f^*d}(x, \varepsilon) \subset X$, wo $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ beliebig sind. Es folgt für alle $B_{f^*d}(x, \varepsilon) \subset X$ aus der Definition der Metrik f^*d, dass $B_{f^*d}(x, \varepsilon) = f^{-1}(B_d(f(x), \varepsilon))$, wo $B_d(f(x), \varepsilon) \subset Y$ ein Ball bzgl. d ist. Da f stetig bzgl. $\mathcal{O}$, folgt $B_{f^*d}(x, \varepsilon) \in \mathcal{O}$. Weil $B_{f^*d}(x, \varepsilon)$ eine beliebige Menge aus der Basis ist, folgt $\mathcal{O}(f^*d) \subset \mathcal{O}$.

c) Da f injektiv, ist $f^{-1} : f(X) \to X$ definiert und es gilt $(f^{-1})^{-1} : X \to f(X)$ mit $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$. Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit ist für jedes $U \in \mathcal{O}$, $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U) \in \mathcal{O}'_{f(X)}$, wo $\mathcal{O}'_{f(X)}$ die auf $f(X)$ induzierte Unterraumtopologie von $\mathcal{O}'$ ist. Nach Definition der Unterraumtopologie und weil (Y, d) ein metrischer Raum ist, ist eine Basis von $\mathcal{O}'_{f(X)}$ gegeben durch $\{B_d(f(x), \varepsilon) \cap f(X) \mid x \in X, \varepsilon > 0\}$, also existiert für jedes $f(x) \in f(U)$ (d.h. für jedes $x \in U$) eine Umgebung $(B_d(f(x), \varepsilon) \cap f(X)) \subset f(U)$. Analog zu Teil b) folgt dann $f^{-1}(B_d(f(x), \varepsilon) \cap f(X)) = B_{f^*d}(x, \varepsilon) \subset f^{-1} \circ f(U) = U$. Also ist U offen bzgl. $\mathcal{O}(f^*d)$.

Lösung 2.

Sei $S^n = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|_2 = 1\}$ und definieren wir nach Anleitung

$$f : S^n \times [-1, 1] \to S^{n+1},\ f(\vec{x}, x_{n+2}) = \left(\left(\sqrt{1 - x_{n+2}^2} \right) \vec{x}\ ,\ x_{n+2} \right),$$

wo $\vec{x} = \{x_1, ..., x_{n+1}\}$. Es ist leicht zu sehen, dass $f : S^n \times (-1, 1) \to S^{n+1} \backslash \{\pm e_{n+2}\}$ ein Homöomorphismus ist, mit der Umkehrabbildung $f^{-1}(\vec{x}, x_{n+2}) = \left(\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|_2}, x_{n+2} \right)$. Sei R die Äquivalenzrelation, die die Suspension definiert. Es gilt $f^{-1}(\pm e_{n+2}) = S^n \times \{\pm 1\}$, also ist $\tilde{f} : \Sigma S^n \to S^{n+1}$ wohldefiniert durch $f = \tilde{f} \circ \pi_R$, und eine Bijektion. $f : S^n \times [-1, 1] \to S^{n+1}$ ist offensichtlich stetig und nach (7.2)(b) ist dann auch $\tilde{f}$ stetig. Da $S^n \times [-1, 1]$ kompakt ist, ist so auch ΣS^n nach (7.4)(a). Also haben wir eine stetige Bijektion $\tilde{f}$ von einem kompakten Raum ΣS^n nach S^{n+1}, der haussdorffsch ist, und so ist $\tilde{f}$ ein Homöomorphismus nach (6.6)(b).

Lösung 3.

a) i) $\varnothing \in \tilde{\mathcal{O}}$, da $\varnothing \in \mathcal{O} \subset \tilde{\mathcal{O}}$
$X \in \tilde{\mathcal{O}}$, da $X = X \backslash \varnothing$ und $\varnothing \subset \mathbb{R}^n$ kompakt

ii) Sei $(U_i)_{i \in I}$ Familie in $\tilde{\mathcal{O}}$ und $J := \{i \in I \mid U_i \in \mathcal{O}\}$. Falls $J = I$, $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O} \subset \tilde{\mathcal{O}}$. Sonst

$$X \backslash \bigcup_{i \in I} U_i = \bigcap_{i \in I} (X \backslash U_i) = \bigcap_{i \in J} (\mathbb{R}^n \backslash U_i) \cap (\bigcap_{i \in I \backslash J} (X \backslash U_i))$$

Das ist ein Durchschnitt von abgeschlossenen Teilmengen in $\mathbb{R}^n$, von denen mindestens eine kompakt ist, also ist $X \backslash \bigcup_{i \in I} U_i =: K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt.

iii) Seien $U_1, U_2 \in \tilde{\mathcal{O}}$. Fallunterscheidung:

- $U_1, U_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O} \subset \tilde{\mathcal{O}}$
- $U_1 \in \mathcal{O}$, $U_2 \in X \backslash K$ mit $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt $\Rightarrow$ $U_1 \cap U_2 = U_1 \cap (\mathbb{R}^n \backslash K) \in \mathcal{O} \subset \tilde{\mathcal{O}}$
- $U_1 \in X \backslash K_1$, $U_2 \in X \backslash K_2$ mit $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^n$ kompakt $\Rightarrow$ $U_1 \cap U_2 = X \backslash (K_1 \cup K_2) \in \tilde{\mathcal{O}}$ da $K_1 \cup K_2 \subset \mathbb{R}^n$ kompakt.

iv) Zeige: X ist kompakt.
Sei $(U_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung von X. Dann ex. $i_0 \in I$ mit $\infty \in U_{i_0}$ und $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt mit $U_{i_0} = X \backslash K$. Die $V_i := U_i \cap \mathbb{R}^n$ sind offen in $\mathbb{R}^n$ und überdecken $\mathbb{R}^n$, insbesondere K. Also existiert $E \subset I$ endlich mit $K \subset \bigcup_{i \in E} U_i$. Dann gilt $X = \bigcup_{i \in E \cup \{i_0\}} U_i$.

b) Man rechnet nach, dass für alle $y \in S^n \backslash \{e_{n+1}\}$ gilt: $f(p(y)) = y$. Also, $f(\mathbb{R}^n) = S^n \backslash \{e_{n+1}\}$. Außerdem sieht man leicht, dass f injektiv ist. Setzt man f durch $f(\infty) := e_{n+1}$ auf X fort, so ist $f : X \to S^n$ bijektiv. Um zu zeigen, dass f stetig ist, genügt es, die Stetigkeit im Punkt ∞ nachzuweisen, da sie an allen Punkten $x \in \mathbb{R}^n$ klar ist.

Für die Umgebungsbasis $U_\varepsilon = \{y \in S^n \mid y_{n+1} > 1 - \varepsilon\}$ von e_{n+1} in S^n, $\varepsilon > 0$, gilt $f^{-1}(U_\varepsilon) = X \backslash \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leq \sqrt{\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}}\} \in \tilde{\mathcal{O}}$. f ist also stetig und bijektiv. Da X kompakt und S^n hausdorffsch ist, ist $X \to S^n$ Homöomorphismus.

Lösung 4.

a) Da S^n kompakt ist, ist auch S^n/R_n kompakt (siehe (7.4)(a)). Sind $x, y \in S^n$ und gilt $[x]_{R_n} \neq [y]_{R_n}$, d.h. $y \neq \{x, -x\}$, so sei $\varepsilon := \frac{1}{2} \min\{|y - x|, |y + x|\}$. Dann sind $(B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \cup B(-x, \frac{\varepsilon}{2})) \cap S^n$ und $(B(y, \frac{\varepsilon}{2}) \cup B(-y, \frac{\varepsilon}{2})) \cap S^n$ R_n-saturierte, disjunkte, offene Mengen in S^n, die auf disjunkte, offene Umgebungen von $[x]_{R_n}$, $[y]_{R_n}$ in S^n/R_n projizieren.

b) Sei $\rho_n : S^n \to S^n/R_n$ die kanonische Projektion und $j : S^n \to \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ die Inklusionsabbildung. Dann existiert genau eine Abbildung $h : S^n/R_n \to \mathbb{R}P^n$ mit $h \circ \rho_n = \pi_{n+1} \circ j$. Da $\pi_{n+1} \circ j$ stetig ist, folgt aus (7.2)(b) die Stetigkeit von h. h besitzt eine stetige Umkehrabblidung, nämlich $h^{-1}(\pi_{n+1}(x)) = \rho_n(\frac{x}{\|x\|_2})$, also ist h Homöomorphismus.

*c) Man sieht zunächst (mit (7.2)(b) und der expliziten Formel für $\tilde{F}|_{D_n}$), dass $\tilde{F} : \mathbb{R}P^n \cup D_n \to \mathbb{R}P^n$ stetig (bzgl. der Summentopologie auf $\mathbb{R}P^n \cup D_n$) ist. Anwenden der Definition von $\mathbb{R}P^n \cup_f D_n$ (als Menge) zeigt, dass $\tilde{F}$ eine Bijektion $F : \mathbb{R}P^n \cup_f D_n \to \mathbb{R}P^n$ induziert. Nach (7.2)(b) impliziert die Stetigkeit von $\tilde{F}$ die Stetigkeit von F. Mit (6.6)(b) und Teil a)+b) folgt, dass F ein Homöomorphismus ist.