Bonusblatt zur Vorlesung “Topologie” im SS 16

Prof. V. Bangert **19. 7. 2016**

Schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Lösung. *Abgabe am 26. 7. vor 12 Uhr.*

Aufgabe 1.

Zeigen Sie: Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x(y^5+3)+\sin((1-x^2)\ln(2+y)) &= 1 \\ y^3\cos x+(1-y^2)e^{xy} &= 0 \end{aligned}$$

besitzt eine Lösung $(x_0, y_0) \in (-1,1)\times(-1,1)$.

Aufgabe 2.

Sei $\gamma : [0,1] \to X$ Weg von $\gamma(0) =: x_0$ nach $\gamma(1) =: x_1$ und $J_\gamma : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$ der im Satz (9.9) behandelte Isomorphismus, $J_\gamma([\sigma]) := [(\overline{\gamma} * \sigma) * \gamma]$.

Zeigen Sie: J_γ ist genau dann unabhängig von der Wahl von γ, wenn $\pi_1(X, x_0)$ abelsch ist.

(“J_γ ist unabhängig von der Wahl von γ” bedeutet “Ist $\tilde{\gamma} : [0,1] \to X$ ein weiterer Weg von x_0 nach x_1, so gilt $J_{\tilde{\gamma}} = J_\gamma$”.)

Aufgabe 3.

Sei $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ und $\gamma : S^1 \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ stetig.

Zeigen Sie: Gilt für alle $z \in S^1$: $\gamma(-z) = -\gamma(z)$, so ist die Umlaufzahl $n(\gamma, 0)$ von γ um $0 \in \mathbb{C}$ ungerade.

Anleitung: Sei $p : \mathbb{R} \to S^1$ die Überlagerung $p(t) := e^{2\pi i t}$ und $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Hochhebug von $f := \frac{\gamma\circ p}{|\gamma\circ p|} : \mathbb{R} \to S^1$. Zeigen Sie, dass dann sowohl $t \mapsto \tilde{f}(t+\frac{1}{2})$ als auch $t \mapsto \tilde{f}(t) + \frac{1}{2}$ Hochhebungen von $t \mapsto f(t+\frac{1}{2})$ (und sich deshalb nur um ein $k \in \mathbb{Z}$ unterscheiden).

Aufgabe 4.

Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x\cos(y) &= x^2+y^2-1 \\ y\cos(x) &= \sin(2\pi(x^2+y^2)) \end{aligned}$$

eine Lösung $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $x_0^2 + y_0^2 < 1$ besitzt.

Anleitung: Zeigen Sie mit Aufgabe 3), dass $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, $\gamma(x,y) := (x\cos(y), y\cos(x))$, Umlaufzahl $\neq 0$ um $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ hat.

Lösung 1.
Sei

$$f(x,y) = x(y^5+3) + \sin((1-x^2)\ln(2+y)) - 1 \ , \ g(x,y) = y^3\cos x + (1-y^2)e^{xy}.$$

Dann gilt für alle $x, y \in [-1,1]$:

$$\begin{aligned} f(1,y) &= y^5 + 2 > 0 \ , \ f(-1,y) = -y^5 - 4 < 0 \\ g(x,1) &= \cos x > 0 \ , \ g(x,-1) = -\cos x < 0. \end{aligned}$$

Dann impliziert Folgerung (10.19): Es existiert $(x_0, y_0) \in (-1,1) \times (-1,1)$ mit $f(x_0,y_0) = g(x_0,y_0) = 0$. Dieses (x_0,y_0) löst das Gleichungssystem.

Lösung 2.
Sei $\pi_1(X,x_0)$ abelsch, $[\sigma] \in \pi_1(X,x_0)$ und γ_1, γ_2 Wege von x_0 nach x_1. Dann gilt $J_{\gamma_1}([\sigma]) = [(\overline{\gamma}_1 * \sigma) * \gamma_1] = [(\overline{\gamma}_1 * (\sigma * (\gamma_2 * \overline{\gamma}_2))) * \gamma_1] = [((\overline{\gamma}_1 * \sigma) * \gamma_2) * (\overline{\gamma}_2 * \gamma_1)] \in \pi_1(X,x_1)$. Da $\pi_1(X,x_1)$ auch abelsch ist, folgt $J_{\gamma_1}([\sigma]) = [(\overline{\gamma}_1 * \sigma) * \gamma_2] \cdot [\overline{\gamma}_2 * \gamma_1] = [\overline{\gamma}_2 * \gamma_1] \cdot [(\overline{\gamma}_1 * \sigma) * \gamma_2] = [(\overline{\gamma}_2 * ((\gamma_1 * \overline{\gamma}_1) * \sigma)) * \gamma_2] = [(\overline{\gamma}_2 * \sigma) * \gamma_2] = J_{\gamma_2}([\sigma])$.
Ist $\pi_1(X,x_0)$ nicht abelsch, so existieren $[\sigma], [\tau] \in \pi_1(X,x_0)$ mit $[\sigma]^{-1} \cdot [\tau] \cdot [\sigma] \neq [\tau]$. Für γ, ein Weg von x_0 nach x_1, ist auch $\gamma * \sigma$ ein Weg von x_0 nach x_1. Es gilt dann $J_\gamma([\tau]) \neq J_\gamma([(\overline{\sigma} * (\tau * \sigma))])$ und $[(\overline{\gamma} * (\overline{\sigma} * (\tau * \sigma))) * \gamma] = [((\overline{\gamma} * \overline{\sigma}) * \tau * (\sigma * \gamma)] = J_{\gamma * \sigma}([\tau])$, also $J_\gamma([\tau]) \neq J_{\gamma*\sigma}([\tau])$.

Lösung 3.
Es gilt $\gamma(-z) = -\gamma(z)$, also $\gamma(-p(t)) = \gamma(-e^{2\pi i t}) = \gamma(e^{2\pi i(t+1/2)}) = -\gamma(p(t))$ und damit $f(t+1/2) = -f(t) \in S^1$. Für $\tilde{f}$ Hochhebung von f gilt

$$e^{2\pi i \tilde{f}(t+1/2)} = p \circ \tilde{f}(t+1/2) = f(t+1/2) = -f(t) = -e^{2\pi i \tilde{f}(t)} = e^{2\pi i(\tilde{f}(t)+1/2)},$$

also gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $\tilde{f}(t+1/2) - \tilde{f}(t) = 1/2 + k$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann ist $\tilde{f}(1) - \tilde{f}(0) = \tilde{f}(1/2+1/2) - \tilde{f}(1/2) + \tilde{f}(1/2) - \tilde{f}(0) = 1/2 + k + 1/2 + k = 1 + 2k$ ungerade. Es ist klar, dass f homotop zu $\gamma \circ p$ in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ ist, und damit gilt $n(\gamma, 0) \notin 2\mathbb{Z}$.

Lösung 4.
Sei $f : D^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) := (x\cos(y) - x^2 - y^2 + 1, y\cos(x) - \sin(2\pi(x^2+y^2)))$, offensichtlich stetig, und es gilt $f|_{S^1}(x,y) = (x\cos(y), y\cos(x))$. Es gilt

$$f|_{S^1}(-x,-y) = (-x\cos(-y), -y\cos(-x)) = -(x\cos(y), y\cos(x)) = -f|_{S^1}(x,y).$$

Da $\cos|_{[-1,1]} > 0$, folgt $x\cos(y) \neq 0$ falls $x \neq 0$, $y \in [-1,1]$ und $y\cos(x) \neq 0$ falls $y \neq 0$, $x \in [-1,1]$, also $f|_{S^1}(x,y) \neq (0,0) \in \mathbb{R}^2$. Mit dem Isomorphism $(\mathbb{C},+) \simeq (\mathbb{R}^2,+)$ gilt nach Aufgabe 3, dass $n(f|_{S^1}, 0) \neq 0$. Aus dem Satz (10.12) folgt die Existenz von einem $(x_0,y_0) \in D^2$ mit $f(x_0,y_0) = 0$. Dieser Punkt löst das Gleichungssystem.