Funktionalanalysis
Sommersemester 2021

Sebastian Goette
Jonas Schnitzer

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/geometrie/lehre/ss2021/FunkAna/

10. Übungsblatt

Abgabetermin 5.7.2020

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt. Sie können Übungsblätter in Gruppen von bis zu 2 Studierenden abgeben.
Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Übung 10.1 *Beweisen oder widerlegen Sie:*

1. *Es sei $1 \leq p < q < \infty$ und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar, dann gilt $L^p(\Omega) \subseteq L^q(\Omega)$.*
2. *Es sei $1 \leq p < q < \infty$ und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar, dann gilt $L^q(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$.*
3. *Es sei $1 \leq p < q < \infty$ und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar mit $\lambda(\Omega) < \infty$, dann gilt $L^q(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$.*
4. *Es sei $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1$ und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar, $f \in L^p(\Omega)$ und $g \in L^q(\Omega)$. Dann existiert $1 \leq r \leq \infty$ mit $fg \in L^r(\Omega)$.*

Übung 10.2 *Es seien $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ messbar. Nach Aufgabe 9.2 ist $L^2(\Omega_1) \otimes L^2(\Omega_2)$ ein Vektorraum mit einem Skalarprodukt, den wir im Sinne von Aufgabe 9.1 zu einem Hilbertraum vervollständigen können. Wir bezeichnen diese Vervollständigung mit $L^2(\Omega_1)\overline{\otimes}L^2(\Omega_2)$. Zeigen Sie:*

$$L^2(\Omega_1)\overline{\otimes}L^2(\Omega_2) \cong L^2(\Omega_1 \times \Omega_2).$$

Hinweis: Konstruieren Sie eine Abbildung $L^2(\Omega_1) \otimes L^2(\Omega_2) \to L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ mit Hilfe der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts und zeigen Sie, dass diese Abbildung injektiv ist und das Bild dicht liegt.

Übung 10.3 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, das die Segmentbedingung erfüllt, $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $1 \leq p, q < \infty, f \in W^{k,p}(\Omega)$ und $g \in W^{k,q}(\Omega)$. Finden Sie eine von p und q abhängige Bedingung, so dass ein $1 \leq r \leq \infty$ existiert mit $fg \in W^{k,r}(\Omega)$.*
Hinweis: Finden Sie zunächst ein $1 \leq r \leq \infty$, so dass $fg \in L^r(\Omega)$ und zeigen Sie weiter

$$\partial_i(fg) = (\partial_i f)g + f(\partial_i g).$$

Vervollständigen Sie den Beweis mit einer geeigneten Induktion.

Übung 10.4 *Betrachten Sie $f_t \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ für $t > 0$ mit $f_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$. Zeigen Sie, dass $f_s * f_t = f_{s+t}$. Überlegen Sie sich zunächst, dass es ausreicht, $(f_s * f_t)(0, \ldots, 0, z)$ aus zurechnen.*
Hinweis: Es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_t \, \mathrm{d}\lambda = 1.$$