Funktionalanalysis
Sommersemester 2021

Sebastian Goette
Jonas Schnitzer

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/geometrie/lehre/ss2021/FunkAna/

11. Übungsblatt

Abgabetermin 12.7.2020

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt. Sie können Übungsblätter in Gruppen von bis zu 2 Studierenden abgeben.
Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Übung 11.1 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes und beschränktes Gebiet. Zeigen Sie, dass $C_c^\infty(\Omega)$ nicht dicht in $W^{1,2}(\Omega)$ liegt.*

Übung 11.2 *Es sei $r \in \mathbb{R}$ und f_r auf $B_1(0) \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ gegeben durch $f_r(x) = |x|^r$. Zeigen Sie*

1. *Für jeden Multiindex γ mit $|\gamma| = k$ existiert ein homogenes Polynom p_γ vom Grad k, so dass $\partial^\gamma f_r = p_\gamma \, f_{r-2k}$.*
2. *Es gibt Konstanten $c = c_{k,n} > 0$ und $C = C_{k,n}$, so dass*

$$c\, f_{r-k} \leq \sum_{|\gamma|=k} |\partial^\gamma f_r| \leq C\, f_{r-k}$$

Übung 11.3 (1+2+1 Punkte) *Es sei $r \in \mathbb{R}$ und f_r gegeben wie in Aufgabe 11.2.*

1. *Sei $r \notin \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass $f_r \in C^{k,\alpha}(B_1(0))$ genau dann, wenn $r \geq k + \alpha$.*
2. *Sei $r \notin \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass $f_r \in W^{k,p}(B_1(0))$ genau dann, wenn $r > k - \frac{n}{p}$.*
3. *Es sei $H_1(0) = \left\{ x \in B_1(0) \;\middle|\; x_n > 0 \right\}$ der obere Halbball. Geben Sie für alle n, k und $1 \leq p < \infty$ eine Funktion $f \in W^{k,p}(H_1(0))$ die vom Spuroperator nicht nach $W^{k,p}(\partial H_1(0))$ abgebildet wird.*

Übung 11.4 (1+3 Punkte) *Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein offenes und beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand $\partial\Omega$ und es bezeichne $S\colon W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ die Spurabbildung für $1 \leq p < \infty$. Zeigen Sie:*

1. $\ker(S) = W_0^{1,p}(\Omega)$.
2. *Die Abbildung $N\colon W^{1,p}(\Omega) \ni f \mapsto \|Df\|_{L^p(\Omega)} + \|S(f)\|_{L^p(\partial\Omega)} \in \mathbb{R}_0^+$ definiert eine Norm auf $W^{1,p}(\Omega)$, die äquivalent zu der Standardnorm ist.*

Hinweis: Sie dürfen die Poincaré-Wirtinger Ungleichung

$$\|f - f_\Omega\|_{L^p} \leq C\|Df\|_{L^p}$$

verwenden, wobei $f_\Omega = \frac{1}{\lambda(\Omega)} \int_\Omega f \,\mathrm{d}\lambda$ *und* $C > 0$*. Es gibt 2 Bonuspunkte, falls Sie die Aufgabe ohne die Poincaré-Wirtinger Ungleichung beweisen.*