Funktionalanalysis
Sommersemester 2021

Sebastian Goette
Jonas Schnitzer

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/geometrie/lehre/ss2021/FunkAna/

12. (und letztes) Übungsblatt

Abgabetermin 19.7.2020

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt. Sie können Übungsblätter in Gruppen von bis zu 2 Studierenden abgeben.
Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Übung 12.1 *Es seien X, Y Banachräume und $(A_n)_n$ eine Folge kompakter Operatoren von X nach Y, die in der Operatornorm gegen A konvergiert.*

1. *Zeigen Sie, dass $A(B_X)$ präkompakt ist.*
2. *Folgern Sie, dass A kompakt ist.*

Übung 12.2 *Es sei $A\colon X \to Y$ stetig mit $\dim(N(A)) < \infty$, und es gebe einen endlich-dimensionalen Unterraum $Y_0 \subset Y$ mit $Y = R(A) \oplus Y_0$. Zeigen Sie:*

1. *Bezüglich geeigneter Normen existiert eine stetige bijektive Abbildung*
$$X \oplus Y_0 \longrightarrow N(A) \oplus Y\ .$$
2. *Das Bild $R(A)$ ist abgeschlossen in Y.*

Übung 12.3 *Es sei $A\colon X \to Y$ wie in Übung 12.2 und $F\colon X\oplus Y_0 \to N(A)\oplus Y$ die dort konstruierte invertierbare Abbildung.*

1. *Konstruieren mit Hilfe der Inversen von F eine Abbildung $B\colon Y \to X$, so dass $\mathrm{id}_X - B\circ A$ und $\mathrm{id}_Y - A\circ B$ kompakt sind.*
2. *Es seien $A\colon X \to Y$ und $B\colon Y \to X$ stetig, so dass $\mathrm{id}_X - B\circ A$ und $\mathrm{id}_Y - A\circ B$ kompakt sind. Folgern Sie, dass A und B Fredholm-Operatoren sind.*

Übung 12.4 *Es sei $1 < p < \infty$ und $\ell^p(\mathbb{C})$ der Raum der komplexwertigen, p-summierbaren Folgen. Außerdem seien die stetigen linearen Operatoren $L_p, R_p\colon \ell^p(\mathbb{C}) \to \ell^p(\mathbb{C})$ wie in der Vorlesung definiert.*

1. *Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenfunktionen von L_p auf $\ell^p(\mathbb{C})$.*

2. *Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenfunktionen von R_p auf $\ell^p(\mathbb{C})$.*

3. *Für welche $\lambda \in \mathbb{C}$ ist der Operator $R_p + \lambda$ invertierbar?*

4. *Überlegen Sie sich, dass ein stetiger Operator A genau dann stetig invertierbar ist, wenn A^* invertierbar ist, und geben Sie an, für welche λ der Operator $L_p + \lambda$ invertierbar ist.*