Sebastian Goette
Jonas Schnitzer

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/geometrie/lehre/ss2021/FunkAna/

8. Übungsblatt

Abgabetermin 21.6.2020

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt. Sie können Übungsblätter in Gruppen von bis zu 2 Studierenden abgeben.
Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Übung 8.1 *Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, so dass $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k$ für Kompakta $\Omega_k \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \dots$. Zeigen Sie*

$$L^1(\Omega)' \cong L^\infty(\Omega)$$

Hinweis: Finden Sie eine Funktion $f \in L^2(\Omega)$ mit $f > 0$ fast überall und benutzen Sie den Darstellungssatz von Riesz für $L^2(\Omega)$.

Übung 8.2 *Es sei X ein reflexiver Banachraum. Zeigen Sie:*

1. *Ein dicht definierter Operator $A\colon D(A) \subseteq X \to X$ ist genau dann abschließbar, wenn $D(A^*) \subseteq X'$ dicht ist. In diesem Fall ist A^{**} der Abschluss von A.*
2. *Ein symmetrischer (und somit auch dicht definierter) Operator auf einem Hilbertraum ist immer abschließbar.*

Übung 8.3 *Es sei X ein Banachraum.*

1. *Seien $f_n \in X'$, $n \in \mathbb{N}$, so dass $f_n(x)$ für jedes $x \in X$ gegen eine reelle Zahl konvergiert. Zeigen Sie, dass ein $f \in X'$ existiert so, dass (f_n) schwach* gegen f konvergiert.*
2. *Sei X zusätzlich reflexiv. Seien $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, so dass $f(x_n)$ für jedes $f \in X'$ gegen eine reelle Zahl konvergiert. Zeigen Sie, dass ein $x \in X'$ existiert so, dass (x_n) schwach gegen x konvergiert.*

Übung 8.4 *Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt. Zeigen Sie:*

1. *Eine lineare Abbildung $\phi\colon C^0(K) \to \mathbb{R}$ mit*

$$\phi(fg) = \phi(f)\phi(g) \quad \text{für alle } f, g \in C^0(K)$$

und $\phi(\mathbb{1}) = 1$ *ist immer stetig bezüglich* $\|\cdot\|_{\text{sup}}$ *und es gilt* $\|\phi\|_{\text{sup}} = 1$. *Wir bezeichnen die Menge aller solcher Abbildungen mit* $\operatorname{Spec}(C^0(K)) \subseteq C^0(K)'$.

Hinweis: Zeigen Sie, dass wenn es eine Funktion f *mit* $\|f\|_{\text{sup}} < 1$ *und* $\phi(f) = 1$, *dass das Auswerten von* $1 + f\frac{1}{\mathbb{1}-f} = \frac{1}{\mathbb{1}-f}$ *zu einem Widerspruch führt. Warum ist das genug?*

2. *Zeigen Sie, dass die Abbildung*

$$\delta\colon K \ni x \mapsto \delta_x = (f \mapsto f(x)) \in \operatorname{Spec}(C^0(K))$$

eine stetige Bijektion bezüglich der schwach**-Topologie ist.*

Hinweis: Für die Surjektivität betrachten Sie $M = \bigcap_{f \in \ker\phi} f^{-1}(\{0\})$ *für ein* $\phi \in \operatorname{Spec}(C^0(K))$ *und zeigen Sie*

$$\ker\phi = I_M := \{f \in C^0(K) \mid f(m) = 0 \ \forall m \in M\}.$$

Die Inklusion $\subseteq$ *ist trivial. Für die Umkehrung sei* $f \in I_M$. *Zeigen Sie:*

(a) $B_\epsilon = \{x \in K \mid |f(x)| \geq \epsilon\}$ *ist kompakt und* $B_\epsilon \cap M = \emptyset$.

(b) *Es existiert ein* $g_\epsilon \in \ker\phi$ *mit* $g_\epsilon(x) \in [0,1]$ *für* $x \in K$ *und* $g_\epsilon(x) = 1$ *für* $x \in B_\epsilon$.

(c) *Folgern Sie, dass* $g_\epsilon f \in \ker\phi$ *liegt und* $\|f - g_\epsilon f\|_{\text{sup}} \leq \epsilon$.

Vervollständigen Sie den Beweis.