Sebastian Goette
Jonas Schnitzer

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/geometrie/lehre/ss2021/FunkAna/

9. Übungsblatt

Abgabetermin 28.6.2020

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt. Sie können Übungsblätter in Gruppen von bis zu 2 Studierenden abgeben.
Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Übung 9.1 *Es sei* $(V, \|\cdot\|)$ *ein normierter* $\mathbb{C}$*-Vektorraum und* $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle\colon V \times V \to \mathbb{C}$ *ein Skalarprodukt, so dass*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Zeigen Sie:

1. *Für zwei Cauchfolgen* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* V *ist auch* $(\langle v_n, w_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Cauchyfolge in* $\mathbb{C}$.
2. *Die Sesquilinearform* $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle^c\colon \overline{V} \times \overline{V} \to \mathbb{C}$*, die gegeben ist durch*

$$\langle v, w\rangle^c = \lim_{n\to\infty} \langle v_n, w_n\rangle$$

für zwei Cauchyfolgen $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* V *mit* $v_n \to v$ *und* $w_n \to w$ *mit* $v, w \in \overline{V}$ *ist wohldefinert und* $(\overline{V}, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle^c)$ *ist ein Hilbertraum. (* $\overline{V}$ *bezeichnet die Vervollständigung von* V*.)*

Übung 9.2

Es seien $(H_1, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_1)$ *und* $(H_2, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_2)$ *zwei Hilberträume. Wir betrachten das algebraische Tensorprodukt* $\mathcal{H} = H_1 \otimes H_2$*. Zeigen Sie:*

1. *Es existiert eine eindeutige Sesquilinearform* $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_{\mathcal{H}}$ *auf* $\mathcal{H}$*, die auf faktorisierenden Tensoren* $v_1 \otimes v_2$*,* $w_1 \otimes w_2 \in H_1 \otimes H_2$ *gegeben ist durch*

$$\langle v_1 \otimes v_2, w_1 \otimes w_2\rangle_{\mathcal{H}} = \langle v_1, w_1\rangle_1 \langle v_2, w_2\rangle_2.$$

Hinweis: Erinnern Sie sich an die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts.

2. *Die Sesquilinearform aus Teil 1. ist ein Skalarprodukt.*

Hinweis: Erinnern Sie sich, dass jedes Element $\Phi \in \mathcal{H}$ *als endliche Summe von faktorisierenden Tensoren geschrieben werden kann, also* $\Phi = \sum_{i=1}^n \phi_i \otimes \phi_i'$*. Wählen Sie nun Orthonormalbasen für die endlich-dimesnionalen Unterräume* $\operatorname{span}\{\phi_i\}_{i\in\{1,\dots n\}} \subseteq H_1$ *und* $\operatorname{span}\{\phi_i'\}_{i\in\{1,\dots n\}} \subseteq H_2$.

Übung 9.3 *Es sei* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *messbar und* $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ *für* $p, q \in [1, \infty)$. *Zeigen Sie, dass für* $r \in [p, q]$ *und* $\Theta \in [0, 1]$ *mit* $\frac{1}{r} = \frac{1-\Theta}{p} + \frac{\Theta}{q}$ *die Ungleichung*

$$\|f\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}^{1-\Theta} \|f\|_{L^q}^{\Theta}$$

gilt und somit $f \in L^r(\Omega)$.

Hinweis: Erinnern Sie sich an die Hölder-Ungleichungen und benutzen Sie $|f| = |f|^{(1-\Theta)}|f|^{\Theta}$.

Übung 9.4 (1+2+1 Punkte) *Es sei* $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ *offen und messbar und* $1 \leq p < q < \infty$.

1. *Zeigen Sie, dass* $L^\infty(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ *dicht in* $L^p(\Omega)$ *liegt.*

2. *Zeigen Sie, dass die Menge*

   $$M := \{f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega) \mid \|f\|_{L^q} \leq 1\}$$

   abgeschlossen in $L^p(\Omega)$ *liegt.*

   Hinweis: Benutzen Sie die Reflexivität von $L^q(\Omega)$ *und den Satz von Eberlein-Šmuljan.*

3. *Es sei* $(f_n)_{\{n \in \mathbb{N}\}}$ *eine Folge in* $L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ *und es sei* $f \in L^p(\Omega)$ *mit*

   $$\|f_n - f\|_{L^p} \to 0 \quad \text{und} \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_{L^q} < \infty.$$

   Zeigen Sie, dass für $r \in [p, q]$ $f_n \in L^r(\Omega)$ *und* $\|f_n - f\|_{L^r} \to 0$.

   Hinweis: Sie dürfen die Ergebnisse von Übung 9.3 verwenden.