Kurzscript zur Funktionalanalysis im SS 2021

Sebastian Goette

Einleitung

In der Analysis lernt man viele lineare Abbildungen kennen. Beispielsweise ist Differentiation eine lineare Abbildung $C^k(\Omega) \to C^{k-1}(\Omega)$, und Integration ist eine lineare Abbildung $L^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, jeweils für eine offene Teilmenge $\Omega \in \mathbb{R}^n$. Eine lineare Differentialgleichung ist also eigentlich nichts anderes als ein lineares Gleichungssystem.

Da die beteiligten Vektorräume in der Regel unendlich-dimensional sind, funktionieren die üblichen Methoden und Konzepte der linearen Algebra (wie beispielsweise das Gaußverfahren oder das charakteristische Polynom) nicht. Manche numerische Verfahren liefern Näherungslösungen. Aber dazu muss man erst einmal wissen, was eine „Näherungslösung“ überhaupt ist. Außerdem sollte man beweisen können, dass eine exakte Lösung existiert, und dass eine Folge von Näherungslösungen gegen eine Lösung konvergiert. Um darüber sprechen zu können, braucht man einen Konvergenzbegriff auf den beteiligten Vektorräumen, beispielsweise eine Topologie oder eine Norm.

Die Funktionalanalysis beschäftigt sich mit normierten und topologischen Vektorräumen, und stellt einen gewissen Vorrat an Methoden bereit, um lineare Gleichungen in diesen Vektorräumen zu lösen. Im Folgenden werden wir zum einen solche abstrakten Methoden kennenlernen. Zum anderen weren wir einige typische konkrete Probleme betrachten, die sich mit diesen Methoden lösen lassen.

0.1. Beispiel. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, mit glattem Rand, und $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ sei eine Funktion. Gesucht ist eine Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, so dass $\Delta f = g$, hierbei ist $\Delta = \operatorname{div}\operatorname{grad}$ der Laplace-Operator. Der Laplace-Operator leitet zweimal ab, macht also aus einer C^k-Funktion eine C^{k-2}-Funktion, falls $k \geq 2$. Er ist linear, also können wir die obige Poisson-Gleichung als ein „unendlich-dimensionales lineares Gleichungssystem“ auffassen.

Ohne Zusatzbedingungen ist das Problem sicher nicht eindeutig lösbar, beispielsweise löst jede affine Funktion $f(x) = \langle x, v\rangle + b$ für $v \in \mathbb{C}^n$ und $b \in \mathbb{C}$ die obige Gleichung mit $g = 0$. Wir können aber fordern, dass f eine stetige Fortsetzung auf den Rand $\partial\Omega$ besitzt und dort verschwindet; den Raum solcher C^k-Funktionen bezeichnen wir mit $C^k_0(\Omega)$. Es stellt sich also die Frage, ob $\Delta\colon C^k_0(\Omega) \to C^{k-2}(\Omega)$ invertierbar ist, und ob die Umkehrabbildungabbildung stetig ist, das heißt, ob die Lösung f stetig von der rechten Seite g abhängt.

0.2. Beispiel. Wir betrachten wieder den Laplace-Operator auf Ω wie oben. Gegeben sei eine Funktion $f_0\colon \Omega \to \mathbb{C}$. Gesucht ist $T > 0$ und eine Funktion $f\colon \Omega \times [0, T) \to \mathbb{C}$ mit $f(\,\cdot\,, 0) = f_0$, die eine der folgenden Gleichungen löst:

$$\dot f = \Delta f \qquad \text{(Wärmeleitungsgleichung)} \tag{1}$$

$$\ddot f = \Delta f \qquad \text{(Wellengleichung), oder} \tag{2}$$

$$i\,\dot f = \Delta f \qquad \text{(Schrödingergleichung),} \tag{3}$$

wobei $\dot f$ die Ableitung von f nach der „Zeit“ t bezeichne, während Δ nur in „Raumrichtung“, das heißt in Richtung des $\mathbb{R}^n$ ableitet. Gleichungen dieser Form sind einfache Beispiele (linearer) *Evolutionsgleichungen.* Sie beschreiben, wie sich ein (zum Beispiel physikalisches) System mit Anfangszustand f_0 im Laufe der Zeit $t \geq 0$ entwickelt (für die Wellengleichung sollten wir auch noch $\dot f(\,\cdot\,, 0) = g_0$ fordern).

Bei geeigneten Randbedingungen ist der Laplace-Operator „formal selbstadjungiert." Beispielsweise gilt nach dem Satz von Green für alle $f,\, g \in C_0^2(\Omega)$, dass

$$\langle -\Delta f, g\rangle_{L^2} = -\int_\Omega \Delta f \cdot g \, d\lambda = \int_\Omega \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g\rangle \, d\lambda = -\int_\Omega f \cdot \Delta g \, d\lambda = \langle f, -\Delta g\rangle \ .$$

Ein möglicher Lösungsansatz könnte daher sein, Eigenwerte des Laplace-Operators zu finden, also Funktionen in $u_\lambda \in C_0^\infty(\Omega)$, so dass

$$\Delta u_\lambda = -\lambda \, u_\lambda \ .$$

Dann erhalten wir elementare Lösungen der Form $e^{-\lambda t} \, u_\lambda$ für die Wellengleichung (1), $e^{\pm i\sqrt{\lambda} t} \, u_\lambda$ für die Wärmeleitungsgleichung (2), und $e^{-i\lambda t} \, u_\lambda$ für die Schrödingergleichung (3). Da es zu jeder Eigenfunktion zwei Lösungen der Wellengleichung gibt, sollten wir neben f_0 auch einen Grenzwert für $\dot f$ für $t \to 0$ angeben.

Nach dem Spektralsatz gibt es für jeden kompakten selbstadjungierten Operator A auf einem separablen Hilbertraum H stets eine *Hilbert-Basis* $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ aus Eigenvektoren u_i zu $\mu_i \in \mathbb{R}$, das heißt, es gilt $\langle u_i, u_j\rangle = \delta_{ij}$, und für alle $v \in H$ existiert eine Folge $(a_i)_i \in \ell^2$, so dass

$$v = \sum_{i=0}^\infty a_i \, u_i \ .$$

Außerdem gilt

$$\lim_{i\to\infty} \mu_i = 0 \ .$$

Man beachte: da wir unendliche Reihen anstelle von Linearkombinationen betrachten, ist eine Hilbertbasis in der Regel keine Basis im Sinne der linearen Algebra.

Der Operator $A = (1-\Delta)^{-1}$ auf $H = L^2(\Omega)$ erfüllt die Voraussetzungen des Spektralsatzes, und die Eigenvektoren u_i sind gleichzeitig Eigenvektoren von Δ zum Eigenwert $\lambda_i = \frac{1}{\mu_i} - 1$. Wir schreiben

$$f_0 = \sum_{i=0}^\infty a_i \, u_i$$

und konstruieren Lösungen unser Evolutionsgleichungen als Reihen, zum Beispiel

$$f(x,t) \sum_{i=0}^\infty a_i \, e^{-\lambda_i t} \, u_i(x)$$

als Lösung der Wärmeleitungsgleichung. Wir müssen noch überprüfen, ob diese Reihe konvergiert, und ob die Grenzfunktion die Wärmeleitungsgleichung mit der korrekten Anfangsbedingung löst. Für die anderen beiden Gleichungen können wir ähnlich vorgehen.

KAPITEL 1

Banachräume und stetige lineare Abbildungen

Wir wiederholen Normen, Metriken, Topologien und Vollständigkeit. Anschließend definieren Banachräume und stetige lineare Abbildungen. Diese Begriffe sind zentral für die gesamte Vorlesung.

Wir erinnern uns an einige Konzepte aus der Analysis 2, siehe [**5**, Kap 6]. Dazu benötigen wir den Absolutbetrag $|x|$ auf $\mathbb{R}$ und $|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$, mit den folgenden Eigenschaften, jeweils für alle λ, $\mu \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

(1) *Positivität.* $|\lambda| \geq 0$, und $|\lambda| = 0$ genau dann, wenn $\lambda = 0$.
(2) *Subadditivität.* $|\lambda + \mu| \leq |\lambda| + |\mu|$.
(3) *Multiplikativität.* $|\lambda\mu| = |\lambda| \cdot |\mu|$.

1.1. Definition. Es sei X ein $\Bbbk$-Vektorraum, mit $\Bbbk = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Eine *Norm* auf X ist eine Abbildung $\| \cdot \| : X \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften, jeweils für alle x, $y \in X$ und $\lambda \in \Bbbk$.

(1) *Positivität.* $\|x\| \geq 0$, und $\|x\| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.
(2) *Subadditivität.* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
(3) *Homogenität.* $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

Ein Vektorraum mit einer Norm heißt kurz *normierter Vektorraum.*

Es ist manchmal sinnvoll, auch ∞ als Wert einer Norm zuzulassen. Die Axiome (1)–(3) lassen sich entsprechend interpretieren. Oftmals definiert man zunächst eine Norm mit Werten in $[0, \infty]$. Die Elemente endlicher Norm bilden einen Untervektorraum, auf den man sich anschließend einschränken kann, siehe etwa Definitionen 1.14 und 1.21.

1.2. Bemerkung. Wir kennen auch die Begriffe *Metrik* und *Topologie.*

(1) Jede Norm auf einem Vektorraum X induziert eine Metrik auf der Menge der Vektoren in X.
(2) Jede Metrik auf einer Menge induziert eine Topologie auf dieser Menge.
(3) Äquivalente Normen induzieren die gleiche Topologie.
(4) Begriffe wie „Konvergenz“ und „Stetigkeit“ hängen nur von der Topologie ab. Also bedeutet sie für äquivalente Normen das gleiche.

1.3. Beispiel. Auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ sind jeweils alle Normen äquivalent. Also ist hier der Konvergenzbegriff unabhängig von der Norm.

1.4. Definition. Es sei (M, d) ein metrischer Raum. Eine *Cauchy-Folge* in M ist eine Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$d(p_m, p_n) < \varepsilon \qquad \text{für alle} \qquad m, n \geq n_0 \; .$$

1.5. Bemerkung. Dieser Begriff hängt von der Metrik ab, nicht nur von der Topologie.

(1) Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.
(2) Es gibt Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$, die nicht konvergieren.

1.6. Definition.

(1) Ein metrischer Raum heißt *vollständig,* wenn jede Cauchy-Folge konvergiert.

(2) Ein normierter Vektorraum heißt *Banachraum,* wenn die induzierte Metrik vollständig ist.

Die reellen Zahlen sind vollständig und auch alle endlich-dimensionale normierten $\mathbb{R}$- und $\mathbb{C}$-Vektorräume.

1.7. Beispiel. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und versehen mit dem Lebesgue-Maß. Wir wissen schon oder werden noch sehen, dass die folgenden normierten Vektorräume vollständig sind.

(1) Der Raum $C^0(\Omega, \Bbbk)$ der stetigen Funktionen auf Ω mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_{\sup}$, siehe Satz 2.3.
(2) Der Raum $C^{k,\alpha}(\Omega, \Bbbk)$ der k-fach differenzierbaren Funktionen, deren k-te Ableitung α-Höldersch ist, für $k \in \mathbb{N}$ und $0 < \alpha \leq 1$.
(3) Der Raum $L^\infty(\Omega, \Bbbk)$ der fast überall beschränkten Funktionen.
(4) Der Raum $L^p(\Omega, \Bbbk)$ der p-integrierbaren Funktionen für $1 \leq p < \infty$, siehe Satz 1.27.
(5) Der *Sobolev-Raum* $W^{k,p}(\Omega, \Bbbk)$ der k-fach schwach differenzierbaren Funktionen, deren Ableitungen in L^p liegen, mit $k \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p \leq \infty$.

1.8. Satz (Cantor [**7**, Satz 1.1]). *Es sei (M, d) ein metrischer Raum. Dann existiert ein metrischer Raum $(\overline{M}, d)$ und eine isometrische Einbettung $\iota\colon M \to \overline{M}$, so dass*

(1) *$(\overline{M}, d)$ vollständig und*
(2) *$\operatorname{im} \iota \subset \overline{M}$ dicht ist.*

Wenn $\iota'\colon M \to \overline{M}'$ die gleichen Eigenschaften hat, gibt es eine eindeutige Isometrie $g\colon \overline{M} \to \overline{M}'$, so dass $\iota' = g \circ \iota$.

Man nennt $(\overline{M}, d)$ die *Vervollständigung* von (M, d). Sie hängt nicht nur von M, sondern auch von d ab.

1.9. Beispiel. Aus der Analysis kennen wir Beispiele von Vervollständigungen. Sei $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

(1) Es gilt $\mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}}$. Wenn man $\mathbb{R}$ noch nicht kennt, muss man beim Beweis ein wenig aufpassen, da man keine $\mathbb{R}$-wertigen Normen oder Metriken betrachten darf. Abgesehen davon kann man $\mathbb{R}$ wie oben konstruieren.
(2) In Definition 1.29 führen wir den Raum $C^0_c(\Omega, \Bbbk)$ der Funktionen mit kompaktem Träger ein. Seine Vervollständigung bezüglich der Supremumsnorm $\|\cdot\|_{\sup}$ ist

$$C^0_0(\Omega; \Bbbk) = \Big\{ f \in C^0(\Omega; \Bbbk) \;\Big|\; \text{für alle } \varepsilon > 0 \text{ existiert ein Kompaktum } K \subset \Omega \\ \text{so dass } \big\|f|_{\Omega \setminus K}\big\|_{\sup} < \varepsilon \Big\}$$

(Übung). Man sagt, dass Elemente von $C^0_0(\Omega; \Bbbk)$ „am Rand verschwinden“ oder „bei Unendlich verschwinden“, obwohl Ω weder einen Rand noch unendlich ferne Punkte enthält.
(3) Für $1 \leq p < \infty$, ist $L^p(\Omega)$ die Vervollständigung von $C^0_c(\Omega)$, versehen mit der L^p-Norm, siehe Satz 1.30.
(4) Für $p = \infty$ stimmt das nicht mehr, beispielsweise enthält $L^p(\Omega)$ die konstante Funktion 1, die sich nicht durch kompakt getragene Funktionen approximieren lässt, siehe (2).

1.10. Definition. Sei X ein $\Bbbk$-Vektorraum. Eine Abbildung $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle\colon X \times X \to \Bbbk$ heißt *Skalarprodukt,* wenn sie für alle x, $y \in X$ folgendes erfüllt.

(1) *Linear im zweiten Argument.* Die Abbildung $\langle x,\,\cdot\,\rangle\colon X \to \Bbbk$ ist linear.
(2) *Hermitesch.* $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$.
(3) *Positiv definit.* Es gilt $\langle x, x\rangle \geq 0$, und $\langle x, x\rangle = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.

Dann heißt $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ die zugehörige Norm. Wenn $(X, \|\cdot\|)$ vollständig ist, heißt $(X, \|\cdot\|)$ ein *Hilbertraum.*

Hilberträume sind in gewisser Weise die einfachsten Banachräume. Sie spielen eine große Rolle in der Physik, beispielsweise in der Quantenmechanik. Meistens verlangt man dabei zusätzlich, dass der Grundkörper $\mathbb{C}$ ist.

Skalarprodukte sind *Sesquilinearformen,* das heißt, sie sind im ersten Argument antilinear und im zweiten linear. In der Literatur sind Sesquilinearformen und Skalarprodukte auch oft im ersten Argument linear und im zweiten antilinear. Beide Konventionen haben Vor- und Nachteile; in jedem Fall sollte man bei jedem Buch schauen, welche Konvention dort benutzt wird.

In der obigen Definition wurde stillschweigend benutzt, dass $\langle x, x\rangle \in \mathbb{R}$ wegen (2), und dass die Abbildung $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ eine Norm ist, siehe Proposition 1.12

1.11. Beispiel. Wir kennen einige Hilberträume aus der linearen Algebra und Analysis.

(1) Endlich-dimensionale reelle Hilberträume sind gerade Euklidische Vektorräume.
(2) Endlich-dimensionale komplexe Hilberträume sind gerade Hermitesche Vektorräume.
(3) Der Raum der komplexwertigen, quadratsummierbaren Folgen ist ein Hilbertraum und wird mit ℓ^2 bezeichnet.
(4) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, dann ist $L^2(\Omega)$ ein Hilbertraum (siehe Satz 1.27) mit

$$\langle f, g\rangle = \int \bar{f} \cdot g \, d\mu \,.$$

Später werden wir sehen, dass $L^2(\Omega) \cong \ell^2$ gilt, wenn $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen ist und versehen mit dem Lebesgue-Maß.

1.12. Proposition. *Es sei $(X, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$ ein Vektorraum mit Skalarprodukt. Dann gilt für alle x, $y \in X$:*

(1) Cauchy-Schwarz-Ungleichung. $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$, *und „=“ genau dann, wenn x und y linear abhängig sind, sowie*
(2) Dreiecksungleichung. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Insbesondere ist $\|\cdot\|$ tatsächlich eine Norm.

1.13. Bemerkung. Eine Norm kommt genau dann von einem Skalarprodukt her, wenn sie die *Parallelogrammidentität*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2$$

erfüllt. In diesem Fall erhalten wir das zugehörige Skalarprodukt durch die *Polarisationsformel*

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right) \qquad \text{für } \Bbbk = \mathbb{R}\,,$$
$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right) + \frac{i}{4}\left(\|ix + y\|^2 - \|ix - y\|^2\right) \qquad \text{für } \Bbbk = \mathbb{C}\,.$$

1.14. Definition. Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte $\Bbbk$-Vektorräume. Für eine lineare Abbildung $A\colon X \to Y$ definieren wir die *Operatornorm* mit Werten in $[0, \infty]$ durch

$$\|A\|_{\mathrm{op}} = \sup_{x \in X, \|x\|_X \leq 1} \|A(x)\|_Y \,.$$

Man nennt A *beschränkt,* wenn $\|A\|_{\mathrm{op}} < \infty$, und schreibt

$$\mathcal{L}(X, Y) = \left\{ A\colon X \to Y \;\middle|\; A \text{ linear und beschränkt} \right\} .$$

Der Raum $\left(\mathcal{L}(X, Y), \|\cdot\|_{\mathrm{op}}\right)$ ist offensichtlich wieder ein normierter $\Bbbk$-Vektorraum. Solange wir nur die Operatornorm betrachten, schreiben wir auch kurz $\|A\|$.

1.15. Proposition. *Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte $\Bbbk$-Vektorräume und $A\colon X \to Y$ sei linear. Dann sind äquivalent*

(1) *A ist beschränkt,*
(2) *A ist stetig bezüglich der durch die Normen induzierten Topologien,*
(3) *A ist stetig im Punkt* 0.

1.16. Bemerkung. Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$, $(Z, \|\cdot\|_Z)$ normierte $\Bbbk$-Vektorräume.

(1) Es seien $f\colon Y \to Z$ und $g\colon X \to Y$ linear und beschränkt. Dann ist auch $f \circ g\colon X \to Z$ linear und beschränkt mit
$$\|f \circ g\|_{\mathrm{op}} \le \|f\|_{\mathrm{op}} \cdot \|g\|_{\mathrm{op}} \ .$$
(2) Die Verkettung liefert eine $\Bbbk$-bilineare Abbildung
$$\big(\mathcal{L}(Y,Z), \|\cdot\|_{\mathrm{op}}\big) \times \big(\mathcal{L}(X,Y), \|\cdot\|_{\mathrm{op}}\big) \stackrel{\circ}{\longrightarrow} \big(\mathcal{L}(X,Z), \|\cdot\|_{\mathrm{op}}\big) \ ,$$
beispielsweise gilt $(f + \lambda g) \circ h = f \circ h + \lambda(g \circ h)$. Man sagt auch, die normierten $\Bbbk$-Vektorräume mit den beschränkten linearen Abbildungen bilden eine *über $\Bbbk$-Vektorräumen angereicherte Kategorie.*
(3) Insbesondere ist $\mathcal{L}(X,X)$ für alle $(X, \|\cdot\|_X)$ eine $\Bbbk$-Algebra mit Eins.

1.17. Satz. *Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte $\Bbbk$-Vektorräume, und Y sei vollständig. Dann ist auch $\big(\mathcal{L}(X,Y), \|\cdot\|_{\mathrm{op}}\big)$ vollständig.*

1.18. Bemerkung. Zu den Voraussetzungen im Satz.

(1) Wenn Y nicht vollständig ist, stimmt der Satz nicht. Dazu betrachte $(X, \|\cdot\|_X) = (\Bbbk, |\cdot|)$ und
$$\big(\mathcal{L}(\Bbbk, Y), \|\cdot\|_{\mathrm{op}}\big) \quad \cong \quad \big(Y, \|\cdot\|_Y\big) \ .$$
(2) Der Raum X muss nicht vollständig sein. Sei Y vollständig und $\overline{X}$ die Vervollständigung von X, dann gilt
$$\mathcal{L}\big(\overline{X}, Y\big) \quad \cong \quad \mathcal{L}(X,Y) \ .$$

Wir lassen in Zukunft die Norm gern weg, wenn aus dem Kontext klar ist, welche Norm wir meinen.

1.19. Definition. Es sei X ein normierter Vektorraum. Der Raum $X' = \mathcal{L}(X, \Bbbk)$ heißt *Dualraum* von X. Elemente von X' heißen auch *lineare Funktionale* auf X.

Ein normierter Vektorraum heißt *reflexiv,* wenn die natürliche Abbildung $X \to X''$ eine Isometrie ist.

In vielen Fällen besteht unser Vektorraum X aus Funktionen. Eine auf X definierte Abbildung ist dann gewissermaßen eine „Funktion von Funktionen“; hierfür hat sich der Begriff *Funktional* eingebürgert. Das erklärt auch ein den Namen dieser Vorlesung.

Wir werden uns später noch wesentlich ausführlicher mit Dualräumen und Reflexivität befassen.

1.20. Beispiel. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Die folgenden Aussagen beweisen wir später.

(1) Der Dualraum von $L^2(\Omega)$ ist $L^2(\Omega)$.
(2) Für $p \in (1, \infty)$ existiert genau ein $q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Der Dualraum von $L^p(\Omega)$ ist $L^q(\Omega)$.
(3) Der Dualraum von $L^1(\Omega)$ ist $L^\infty(\Omega)$, aber nicht umgekehrt. Also ist $L^1(\Omega)$ nicht reflexiv.

Zum Schluss des Abschnitts wiederholen wir noch die Theorie der L^p-Räume aus Analysis III, siehe [**6**, Kap 6].

1.21. Definition. Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $\Bbbk = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Für $1 \leq p \leq \infty$ und $f\colon \Omega \to \Bbbk$ messbar definiere

$$\|f\|_{L^p} = \begin{cases} \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} & \text{für } p < \infty \text{, und} \\ \inf\left\{ s > 0 \;\middle|\; \mu\{ x \in \Omega \mid |f| > s \} = 0 \right\} & \text{für } p = \infty. \end{cases}$$

Dann sei

$$L^p(\Omega) = \left\{ f\colon \Omega \to \Bbbk \;\middle|\; f \text{ messbar und } \|f\|_{L^p} < \infty \right\} / \sim ,$$

wobei

$$f \sim g \qquad \Longrightarrow \qquad \mu\left\{ x \in \Omega \;\middle|\; f(x) \neq g(x) \right\} = 0 \ .$$

1.22. Beispiel. Wir betrachten L^p-Räume vor allem für die folgenden Maßräume.

(1) $\mathbb{N}$ mit der vollen Potenzmenge als σ-Algebra und dem Zählmass liefert den Raum ℓ^p.
(2) $\mathbb{R}^n$ mit dem Lebesgue-Maß liefert $L^p(\mathbb{R}^n)$. Da wir Nullmengen ignorieren, liefern die Borel-σ-Algebra und die Lebesgue-σ-Algebra genau die gleichen L^p-Räume.
(3) Sei Ω eine messbare Teilmenge eines gegebenen Maßraumes, dann ist Ω mit der induzierten σ-Algebra und dem induzierten Maß wieder ein Maßraum. Da wir Nullmengen ignorieren, sollte Ω selbst keine Nullmenge sein. So definieren wir zum Beispiel $L^p(\Omega)$ für offene Teilmengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

1.23. Satz (Young-Ungleichung). *Seien $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $x, y > 0$. Dann gilt*

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \ .$$

1.24. Satz (Hölder-Ungleichung). *Seien $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und f, g messbar auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Dann gilt*

$$\left| \int_\Omega fg \, d\mu \right| \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q} \ .$$

1.25. Satz (Minkowski-Ungleichung). *Für $1 \leq p \leq \infty$ erfüllt $\|\cdot\|_{L^p}$ auf $L^p(\Omega; \Bbbk)$ die Dreiecksungleichung.*

Die Vollständigkeit der L^p-Räume kann man zumindest für $p < \infty$ mit Hilfe des folgenden Konvergenzsatzes für Reihen zeigen.

1.26. Proposition. *Es sei $1 \leq p < \infty$ und $f_i \in L^p(\Omega)$ für alle $i \in \mathbb{N}$, mit $\sum \|f_i\|_{L^p} < \infty$. Dann gilt*

(1) *Die Reihe $\sum_i f_i$ konvergiert μ-fast überall gegen eine messbare Funktion g.*
(2) *Es gilt $\|g\|_{L^p} < \infty$.*
(3) *Die Reihe $\sum_i f_i$ konvergiert in L^p gegen g.*

1.27. Satz (Fischer-Riesz). *Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $1 \leq p \leq \infty$. Dann ist $L^p(\Omega; \Bbbk)$ für $\Bbbk = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ vollständig.*

1.28. Folgerung (aus dem Beweis). *Wenn eine Folge in $L^p(\Omega; \Bbbk)$ konvergiert, dann konvergiert eine Teilfolge fast überall.*

1.29. Definition. Es sei M ein topologischer Raum und $f\colon M \to \Bbbk$ mit $\Bbbk = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Dann definiert man den *Träger* von f als

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\left\{ p \in M \;\middle|\; f(p) \neq 0 \right\}} \subset M \ .$$

Es bezeichnet $C^0_c(M; \Bbbk)$ den Raum der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger.

1.30. SATZ. *Es sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $\Bbbk = \mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C}$ *und* $1 \leq p < \infty$. *Dann ist* $L^p(\Omega; \Bbbk)$ *die Vervollständigung von* $\big(C_c^0(\Omega; \Bbbk), \|\cdot\|_{L^p}\big)$.

KAPITEL 2

Kompaktheit

Kompaktheit spielt in der Analysis eine große Rolle. In der Funktionalanalysis betrachtet man nicht nur kompakte Mengen, sondern auch sogenannte „kompakte Operatoren." Als Beispiel betrachten wir Inklusionsabbildungen zwischen Hölderräumen.

2.1. Definition. Eine Teilmenge K eines topologischen Raums X heißt

(1) (*überdeckungs-*) *kompakt,* wenn es zu jeder Menge $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$ offener Teilmengen von X mit $K \subset \bigcup \mathcal{U}$ eine endliche Teilmenge $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ mit $K \subset \bigcup \mathcal{U}_0$ gibt.

(2) *folgenkompakt,* wenn jede Folge $(x_i)_{i \in I}$ in K eine Teilfolge besitzt, die in K konvergiert.

Wir nennen $U \subset X$ *relativ* (*folgen-*) *kompakt,* wenn der Abschluss $\overline{U}$ von U (folgen-) kompakt ist.

2.2. Definition. Eine Teilmenge K eines metrischen Raums X heißt *präkompakt,* wenn es für jedes ε_0 eine endliche Mengen von Punkten x_i für $i = 1, \ldots, N$ gibt, so dass

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_\varepsilon(x_i) .$$

2.3. Satz. *Es sei X ein metrischer Raum und $K \subset X$ eine Teilmenge. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(1) *K ist kompakt.*

(2) *K ist folgenkompakt.*

(3) *K ist präkompakt und vollständig.*

In beliebigen topologischen Räumen sind (1) und (2) nur unter Zusatzvoraussetzungen äquivalent. (Übung?)

In der Analysis des $\mathbb{R}^n$ war „kompakt" oft gleichbedeutend mit „beschränkt und abgeschlossen." Das stimmt nicht in unendlich-dimensionalen Vektorräumen. Betrachte etwa die Folge $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in ℓ^p mit $e_i = (\delta_{ij})_{j \in \mathbb{N}}$, also $e_0 = (1, 0, \ldots)$, $e_1 = (0, 1, 0, \ldots)$, ... Für $i \neq j$ gilt

$$\|e_j - e_i\|_{\ell^p} = (1^p + 1^p)^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{2} .$$

Also enthält $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ keine Teilfolge, die Cauchy-Folge ist, und insbesondere auch keine konvergente Teilfolge.

2.4. Lemma (fast orthogonales Element, Riesz). *Es sei X ein normierter Vektorraum und $V \subsetneq X$ ein abgeschlossener Unterraum. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Vektor $x \in X$ mit $\|x\| = 1$ und*

$$d(x, V) = \inf_{v \in V} \|x - v\| \geq 1 - \varepsilon .$$

Wenn V endlich-dimensional ist, gibt es sogar x mit $\|x\| = d(x, V) = 1$.

2.5. Satz (Heine-Borel, Riesz). *Für einen normierten Vektorraum X sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(1) *Der Raum X hat endliche Dimension.*

(2) *Die Einheitskugel $\bar{B}_X = \overline{B_1(0)}$ ist kompakt.*

Als Ersatz für die relative Kompaktheit beschränkter Mengen in unendlich-dimensionalen Räumen betrachtet man Abbildungen, die beschränkte Teilmengen auf relativ kompakte Teilmengen abbilden. Das ist in Anwendungen oft gut genug.

2.6. Definition. Es seien X, Y normierte $\Bbbk$-Vektorräume. Eine lineare Abbildung $A\colon X \to Y$ heißt *kompakt,* wenn $A(B_1(0)) \subset Y$ relativ kompakt ist. Wir schreiben $\mathcal{K}(X,Y)$ für die Menge der kompakten linearen Abbildungen.

Man beachte die Terminologie: eine lineare Abbildung $A\colon X \to Y$ heißt beschränkt beziehungsweise kompakt, wenn $A(B_1(0)) \subset Y$ beschränkt beziehungsweise relativ kompakt ist.

Eine typische Anwendung kompakter Abbildungen $A\colon X \to Y$ besteht darin, zunächst eine beschränkte Folge $(x_i)_i$ in X zu finden, und dann eine konvergente Teilfolge von $(Ax_i)_i$ in Y zu wählen.

2.7. Bemerkung. Die folgenden Eigenschaften kompakter Abbildungen lassen sich leicht überprüfen (Übung)

(1) Kompakte Abbildungen sind beschränkt, also stetig. Das heißt, $\mathcal{K}(X,Y) \subset \mathcal{L}(X,Y)$.
(2) Linearkombinationen kompakter Abbildungen sind kompakt.
(3) Seien $f \in \mathcal{L}(Y,Z)$ und $g \in \mathcal{L}(X,Y)$. Wenn eine der beiden Abbildungen kompakt ist, dann ist auch $f \circ g$ kompakt.

Insbesondere bilden die kompakten Endomorphismen von X ein Ideal $\mathcal{K}(X,X)$ in $\mathcal{L}(X,X)$, das heißt, der Quotient $\mathcal{L}(X,X)/\mathcal{K}(X,X)$ ist wieder eine Algebra.

Im Folgenden wollen wir Beispiele kompakter Abbildungen kennenlernen. In der Praxis sind das häufig Einbettungen von normierten Vektorräumen. Als Beispiel betrachten wir im Folgenden Hölder-Räume $C^{k,\alpha}(\Omega)$.

2.8. Definition. Es sei X eine Menge und (M,d) ein metrischer Raum, dann definieren wir die *Supremumsmetrik* d_{sup} auf der Menge M^X der Abbildungen $X \to M$ durch

$$d_{\mathrm{sup}}(f,g) = \sup_{x\in X} d(f(x),g(x)) \quad \in \quad [0,\infty]\,.$$

2.9. Bemerkung. Eine Folge von Abbildungen konvergiert gleichmäßig genau dann, wenn sie in der Supremumsmetrik konvergiert.

Wir sprechen hier von einer Metrik, obwohl wir den Wert ∞ zulassen. Tatsächlich lassen sich viele elementare Überlegungen auch für solche „verallgemeinerten“ Metriken durchführen. Beispielsweise definieren wir Cauchy-Folgen in M^X wie gehabt, dann haben (gegebenenfalls nach Weglassen einiger Folgeglieder am Anfang) alle Folgeglieder zueinander endlichen Abstand. In dem Sinne ist auch der folgende Satz zu verstehen.

2.10. Satz. *Es sei (M,d) ein vollständiger metrischer Raum.*

(1) *Für jede Menge X ist (M^X, d_{sup}) vollständig.*
(2) *Für jeden topologischen Raum X ist $C^0(X,M)$ in (M^X, d_{sup}) abgeschlossen und daher ebenfalls vollständig.*

Wenn $M = Y$ ein normierter Vektorraum mit der induzierten Metrik ist, setzen wir $\|f\|_{\mathrm{sup}} = d_{\mathrm{sup}}(f,0)$. Dann dürfen wir uns auf die Menge

$$B(X,Y) = \bigl\{\, f\colon X \to Y \bigm| \|f\|_{\mathrm{sup}} < \infty \,\bigr\} \subset Y^X$$

der beschränkten Abbildungen einschränken, und wenn X ein topologischer Raum ist, auf die Menge

$$BC^0(X,Y) = B(X,Y) \cap C^0(X,Y) \subset C^0(M,N)$$

der beschränkten stetigen Abbildungen. Dadurch gehen wir allen Problemen, die „∞“ verursachen könnte, aus dem Weg.

2.11. Definition. Es sei X ein topologischer und (M, d) ein metrischer Raum. Eine Familie $\mathcal{F} \subset C^0(X, M)$ stetiger Abbildungen heißt *gleichgradig stetig,* wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem x eine Umgebung $U \subset X$ von x gibt, so dass

$$f(y) \in B_\varepsilon(f(x)) \qquad \text{für alle } f \in \mathcal{F} \text{ und alle } y \in U \ .$$

Wir nennen $\mathcal{F}$ *punktweise relativ kompakt,* wenn $\{\, f(x) \mid f \in \mathcal{F} \,\} \subset M$ für alle $x \in X$ relativ kompakt ist.

2.12. Satz (Arzelá-Ascoli). *Es sei X ein kompakter topologischer Raum und (M, d) ein vollständiger metrischer Raum. Für jede Teilmenge $\mathcal{F} \subset C^0(X, M)$ sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(1) *$\mathcal{F}$ ist gleichgradig stetig und punktweise relativ kompakt.*
(2) *Jede Folge in $\mathcal{F}$ hat eine Teilfolge, die in $C^0(X, M)$ gleichmäßig konvergiert.*
(3) *$\mathcal{F}$ ist relativ kompakt in $C^0(X, M)$.*

2.13. Bemerkung. Wenn X ein kompakter metrischer Raum ist, ist eine Teilmenge $\mathcal{F} \subset C^0(X, M)$ genau dann gleichgradig stetig, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$d(x, y) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon$$

für alle x, $y \in X$ und alle $f \in \mathcal{F}$ (Übung).

Umgekehrt impliziert die obige Bedingung gleichgradige Stetigkeit für beliebige metrische Räume X und M, dazu setzen wir $U = B_\delta(x)$ in Definition 2.11. In diesem Fall ist $\mathcal{F}$ also gewissermaßen „gleichmäßig gleichgradig stetig,“ da die Zahl δ nicht von x abhängt. Mit dieser Erkenntnis sehen wir, dass [**7**, Satz 2.4] ein Spezialfall des obiges Satzes 2.12 ist.

Als Beispiel für kompakte Einbettungen betrachten wir im Rest dieses Abschnittes Hölderräume, siehe Beispiel 1.7 (2).

2.14. Definition. Es sei M, N metrische Räume und $0 < \alpha \leq 1$. Eine Abbildung $f \colon M \to N$ heißt *α-Höldersch* oder *α-Hölder-stetig,* wenn

$$[f]_\alpha := \sup_{p \neq q} \frac{d(f(p), f(q))}{d(p, q)^\alpha} < \infty \ .$$

Im Falle $\alpha = 1$ heißt f auch *Lipschitz-stetig.*

Sei $N = Y$ jetzt ein normierter Vektorraum mit der induzierten Metrik, dann definieren wir die *α-Höldernorm* auf $C^0(M, Y)$ durch

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}} = \|f\|_{\sup} + [f]_\alpha \qquad \in [0, \infty]$$

und definieren den *Hölderraum*

$$C^{0,\alpha}(M, Y) = \big\{\, f \in C^0(M; Y) \bigm| \|f\|_{C^{0,\alpha}} < \infty \,\big\} \ .$$

Eine Höldersche Abbildung zwischen metrischen Räumen ist stetig. Sie ist sogar *gleichmäßig stetig,* das heißt, zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ für alle x, $y \in M$ mit $d(x, y) < \delta$ gilt.

Man überzeugt sich leicht, dass $\|\cdot\|_{C^{0,\alpha}}$ eine Norm auf $C^{0,\alpha}(M, Y)$ definiert. Das gilt selbst für $\alpha = 0$, allerdings ist $\|\cdot\|_{C^{0,0}}$ zur Supremumsnorm auf $BC^0(M, Y)$ äquivalent (Übung).

2.15. Satz. *Es sei M ein metrischer Raum und Y ein Banachraum. Für alle $0 \leq \alpha \leq 1$ ist auch $\big(C^{0,\alpha}(M; Y), \|\cdot\|_{0,\alpha}\big)$ ein Banachraum.*

2.16. SATZ. *Es sei M ein kompakter metrischer Raum und $\Bbbk = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Für alle $0 < \alpha \le 1$ besitzt jede beschränkte Folge $(f_k)_k$ in $C^{0,\alpha}(M;\Bbbk)$ eine Teilfolge, die in allen $C^{0,\beta}(M;\Bbbk)$ mit $0 \le \beta < \alpha$ gegen ein $f \in C^{0,\alpha}(M;\Bbbk)$ konvergiert.*

2.17. FOLGERUNG. *Sei (M,d) kompakt, $\Bbbk = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, und $0 \le \beta < \alpha \le 1$. Dann ist die natürliche Einbettung $C^{0,\alpha}(M;\Bbbk) \to C^{0,\beta}(M;\Bbbk)$ kompakt.*

Wir wollen jetzt Funktionen mit Hölderschen Ableitungen betrachten. Daher sei ab sofort wieder $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, und $C^k(\Omega)$ bezeichne den Raum der k-fach stetig differenzierbaren Funktionen. Die k-ten partiellen Ableitungen einer Funktion $f \in C^k(\Omega)$ sind wieder Funktionen auf Ω. Es sei $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{N}_0^n$ ein Multiindex, dann schreiben wir

$$D^\gamma f = \frac{\partial^{|\gamma|} f}{\partial x_1^{\gamma_1} \cdots \partial x_n^{\gamma_n}} \in C^0(\Omega) ,$$

wobei $|\gamma| = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$ die Ableitungsordnung bezeichne. Wenn wir „$\sum_{|\gamma|\le k}$“ oder „$\sum_{|\gamma|=k}$“ schreiben, summieren wir über alle Multiindizes $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$, die die entsprechende Bedingung erfüllen.

Sei schließlich $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, dann bezeichne

$$C^k(\overline{\Omega}) = \left\{ f \in C^k(\Omega) \;\middle|\; D^\gamma f \text{ lässt sich stetig fortsetzen auf } \overline{\Omega} \text{ für alle } \gamma \in \mathbb{N}_0^k \text{ mit } |\gamma| \le k \right\} .$$

Wir betrachten offene Teilmengen, da wir im Folgenden keine Probleme beim Ableiten haben möchten. Wir verlangen, dass sich $D^\gamma f$ auf das Kompaktum $\overline{\Omega}$ stetig fortsetzen lässt, damit wir den Satz 2.16 benutzen können, der seinerseits auf dem Satz von Arzelá-Ascoli fußt.

2.18. DEFINITION. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $k \in \mathbb{N}_0$ und $0 \le \alpha \le 1$. Wir definieren Abbildungen $\|\cdot\|_{C^k}$ und $\|\cdot\|_{C^{k,\alpha}} : C^k(\Omega) \to [0,\infty]$ durch

$$\|f\|_{C^k} = \sum_{|\gamma|\le k} \|D^\gamma f\|_{\sup}$$

$$\text{und} \qquad \|f\|_{C^{k,\alpha}} = \|f\|_{C^k} + \sum_{|\gamma|=k} [D^\gamma f] .$$

Wenn Ω außerdem beschränkt ist, versehen wir $C^k(\overline{\Omega})$ mit der Norm $\|\cdot\|_{C^k}$ und definieren

$$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) = \left\{ f \in C^k(\overline{\Omega}) \;\middle|\; \|f\|_{C^{k,\alpha}} < \infty \right\} .$$

Da $\overline{\Omega}$ kompakt ist, ist $\|f\|_{C^k} < \infty$ für alle $f \in C^k(\overline{\Omega})$. Man sieht wieder leicht, dass $\|\cdot\|_{C^k}$ und $\|\cdot\| \, C^{k,\alpha}$ Normen sind, dass $\|\cdot\| \, C^{k,0}$ zu $\|\cdot\|_{C^k}$ äquivalent ist, und dass somit $C^{k,0}(\overline{\Omega}) = C^k(\overline{\Omega})$ gilt.

2.19. SATZ. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $k \in \mathbb{N}_0$ und $\alpha \in [0,1]$, dann sind die $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ Banach-Räume.*

Wir betrachten jetzt Einbettungen von Hölder-Räumen. Der Einfachheit nehmen wir dabei an, dass $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein *konvexes* Gebiet ist, das heißt, für alle x und $y \in \Omega$ gilt

$$\overline{xy} = \left\{ (1-s)\,x + sy \;\middle|\; s \in [0,1] \right\} \subset \Omega .$$

Der folgende Satz lässt sich in einem etwas allgemeineren Kontext beweisen, siehe [**7**, Satz 2.8], allerdings nicht in Gebieten, in denen Punkte, die im umliegenden $\mathbb{R}^n$ sehr nahe beieinander liegen, in Ω nur durch vergleichsweise lange Wege verbunden werden können.

2.20. SATZ. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein konvexes beschränktes offenes Gebiet, es seien k, $\ell \in \mathbb{N}_0$ mit $\ell \le k$ und α, $\beta \in [0,1]$.*

(1) *Falls $\ell + \beta \le k + \alpha$, gilt $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) \subset C^{\ell,\beta}(\overline{\Omega})$.*

(2) *Falls $\ell + \beta < k + \alpha$, ist die Inklusionsabbildung $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{\ell,\beta}(\overline{\Omega})$ kompakt.*

2.21. Bemerkung. Dieser Satz ist ein wichtiger Baustein zur Behandlung des Problems aus Beispiel 0.1. Der zweite Baustein ist ein Regularitätssatz von Schauder [**7**, Satz 2.9], von dem wir hier nur eine stark vereinfachte Variante benutzen wollen: für alle beschränkten, offenen Gebiete Ω mit glattem Rand und alle $\alpha \in (0,1)$ existiert eine Konstante C, so dass

$$\|f\|_{C^{2,\alpha}} \leq C \left(\|g\|_{C^{0,\alpha}} + \|f\|_{C^0} \right)$$

für alle $g \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ und alle Lösungen $f \in C^2(\overline{\Omega}) \cap C^0_0(\Omega)$ von $\Delta f = g$ gilt. Insbesondere folgt $f \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Mit diesen beiden Resultaten lässt sich zeigen, dass für $g = 0$ und Ω konvex der Lösungsraum

$$\ker\bigl(\Delta \colon C^2(\overline{\Omega}) \cap C^0_0(\Omega) \to C^0(\overline{\Omega})\bigr)$$

endlich-dimensional ist.

KAPITEL 3

Der Satz von Hahn-Banach

In diesem Kapitel wollen wir Elemente im Dualraum V^* eines Banachraums V mit bestimmten Eigenschaften konstruieren. Im endlich-dimensionalen reicht es dazu, solche Elemente induktiv für alle Basiselemente von V anzugeben. In der Funktionalanalysis geht das in gewisser Weise dann noch, wenn V von einer abzählbaren Menge von Vektoren als topologischer Vektorraum erzeugt wird. Im Allgemeinen benötigt man jedoch das Auswahlaxiom in der Gestalt von Zorn's Lemma, so dass wir letzteres zunächst einmal einführen wollen. Hierbei heißt „benötigt," dass man Gegenbeispiele in einer Mengenlehre konstruieren kann, in der das Auswahlaxiom verletzt ist.

3.1. Definition. Eine (*partielle*) *Ordnung* auf einer Menge M ist eine binäre Relation „$\prec$" mit den folgenden Eigenschaften für alle p, q, $r \in M$.

(1) *Reflexivität.* $p \prec p$.
(2) *Antisymmetrie.* Aus $p \prec q$ und $q \prec p$ folgt $p = q$.
(3) *Transitivität.* Aus $p \prec q$ und $q \prec r$ folgt $p \prec r$.

Eine (partielle) Ordnung $\prec$ auf M heißt *total,* wenn $p \prec q$ oder $q \prec p$ für alle p, $q \in M$ gilt.

Jede partielle Ordnung induziert partielle Ordnungen auf allen Teilmengen $N \subset M$ durch Einschränken.

3.2. Definition. Es sei $(M, \prec)$ eine partiell geordnete Menge. Ein *maximales Element* von M ist ein Element $q \in M$, so dass kein $p \in M$ mit $q \prec p$ und $q \neq p$ existiert.

Eine *obere Schranke* für eine Teilmenge $N \subset M$ ist ein Element $q \in M$, so dass $p \prec q$ für alle $p \in N$.

Eine *total geordnete Teilmenge* oder *Kette* in M ist eine Teilmenge $N \subset M$, auf der $\prec$ eine totale Ordnung induziert.

Wir legen im Folgenden die ZFC-Axiome (Zermelo-Fraenkel und „Choice" — das Auswahlaxiom) der Mengenlehre zugrunde. Dadurch wird Zorns Lemma zu einem Satz.

3.3. Satz (Zorns Lemma). *Es sei $(M, \prec)$ eine nicht leere eine partiell geordnete Menge. Wenn jede total geordnete Teilmenge von M eine obere Schranke in M besitzt, dann enthält M ein maximales Element.*

3.4. Satz (Hahn-Banach). *Es sei X ein reeller Vektorraum und $p\colon X \to \mathbb{R}$ sei* sublinear, *das heißt, für alle x, $y \in X$ und $\lambda \geq 0$ gelte*

$$\begin{aligned} p(\lambda x) &= \lambda p(x) \\ \textit{und} \qquad p(x+y) &\leq p(x) + p(y) \;. \end{aligned}$$

Es sei $V \subset X$ ein Unterraum und $\varphi\colon V \to \mathbb{R}$ linear mit

$$\varphi(v) \leq p(v) \qquad \textit{für alle } v \in V \;.$$

Dann gibt es eine Linearform $\psi\colon X \to \mathbb{R}$ mit $\psi|_V = \varphi$ und $\psi(x) \leq p(x)$ für alle $x \in X$.

Man beachte, dass weder der Satz noch der Beweis uns eine Konstruktion für ψ an die Hand gibt.

3.5. Bemerkung. In manchen Bereichen der Mathematik herrscht ein gewisses Misstrauen gegenüber dem Auswahlaxiom und dem Zornschen Lemma. Während das Auswahlaxiom viele merkwürdige Folgerungen zulässt, wirkt der Satz von Hahn-Banach auf den ersten Blick „harmlos," und man wundert sich vielleicht, dass der Beweis das Auswahlaxiom benutzt.

(1) Wenn X endlich-dimensional ist oder eine abzählbare Basis besitzt, kann man den Satz von Hahn-Banach induktiv beweisen, ohne Zorns Lemma zu verwenden.
(2) Andererseits reicht der Satz von Hahn-Banach aus, um das Banach-Tarski-Paradoxon zu erhalten.

Wir erinnern uns an den Dualraum $X' = \mathcal{L}(X, \Bbbk)$ aus Definition 1.19, versehen mit der Operatornorm aus Definition 1.14.

3.6. Folgerung (Hahn-Banach). *Es sei $\Bbbk = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, es sei X ein normierter $\Bbbk$-Vektorraum und $V \subset X$ ein Unterraum mit der induzierten Norm. Dann existiert zu jedem $\varphi \in V'$ ein $\psi \in X'$ mit $\psi|_V = \varphi$ und $\|\psi\| = \|\varphi\|$.*

In konkreten Beispielen ist nicht immer klar, wie solch eine Fortsetzung aussehen könnte. Ein Beispiel betrachten wir in Bemerkung 8.11.

Wir erinnern uns an die Abstandsfunktion aus Lemma 2.4.

3.7. Folgerung. *Es sei X ein normierter Vektorraum, $V \subset X$ ein Untervektorraum und $x \in X$ mit $d(x,V) > 0$. Dann existiert ein $\varphi \in X'$ mit*

$$\varphi|_V = 0\,, \qquad \|\varphi\| = 1 \qquad \textit{und} \qquad \varphi(x) = d(x,V)\,.$$

3.8. Folgerung. *Es sei X ein normierter Vektorraum und $x \in X$.*

(1) *Dann existiert $\varphi \in X'$ mit $\varphi(x) = \|x\|$ und $\|\varphi\| = 1$.*
(2) *Wenn $\varphi(x) = 0$ für alle $\varphi \in X'$, dann folgt $x = 0$.*

Als nächstes benutzen wir den Satz von Hahn-Banach, um konvexe Teilmengen normierter Vektorräume zu trennen.

3.9. Beispiel. Im Endlich-Dimensionalen ist anschaulich klar, dass man zwei disjunkte konvexe Teilmengen durch eine Hyperebene trennen kann. Gemeint ist, dass wir für zwei disjunkte, konvexe Teilmengen A, L in einem endlich-dimensionalen reellen Vektorraum V eine Linearform $\varphi \in V'$ und eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ angeben können, so dass

$$\varphi|_A \geq c \qquad \text{und} \qquad \varphi|_L \leq c\,.$$

Im Unendlich-Dimensionalen muss das nicht so sein. Dazu sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, dann ist die konstante Funktion 1 quadratintegrierbar. Wir betrachten $A = C^0_0(\Omega)$ und $L = \{1\} \subset X = L^2(\Omega)$. Diese Mengen sind konvex und disjunkt. Aber da $C^0_0(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ dicht liegt, nimmt jedes Funktional $\varphi \in X' \setminus \{0\}$ auf A alle reellen Werte an, es kann also kein $c \in \mathbb{R}$ wie oben geben.

Daher werden wir Folgenden stets Zusatzvoraussetzungen brauchen, beispielsweise, dass K offen ist.

3.10. Lemma (Minkowski-Funktional). *Es sei X ein normierter Vektorraum und $A \subset X$ offen und konvex mit $0 \in A$. Definiere $p_A \colon X \to [0,\infty)$ durch*

$$p_A(x) = \inf\Big\{\, t > 0 \;\Big|\; \frac{x}{t} \in A \,\Big\}\,,$$

dann ist p_A sublinear und es gilt $x \in A$ genau dann, wenn $p_A(x) < 1$.

3.11. Satz (Hahn-Banach für konvexe Mengen). *Es sei X ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum und A, $B \subset X$ seien disjunkte konvexe Mengen. Wenn A offen ist, existiert $\varphi \in X'$, so dass*

$$\varphi(x) < \varphi(y) \qquad \textit{für alle } x \in A \textit{ und alle } y \in B\,.$$

Genauer gesagt existiert $c = \sup_{x\in A} \varphi(X)$, so dass $\varphi(x) < c \leq \varphi(y)$ für alle $x \in A$ und alle $y \in B$. In Anwendungen braucht man manchmal eine Verschärfung der obigen Aussage.

3.12. DEFINITION. Es seien A, $B \subset (M, d)$ Teilmengen eines metrischen Raumes.
Wir definieren den *Abstand* von A und B durch

$$d(A, B) = \inf \left\{ d(x, y) \;\middle|\; x \in A, y \in B \right\} .$$

Achtung: Dieser Abstand definiert keine Metrik auf dem Raum der Teilmengen von M.

3.13. BEMERKUNG. Sei $K \subset M$ kompakt, $L \subset M$ abgeschlossen, und K, L disjunkt. Dann ist $d(K, L) > 0$.

Es folgt eine Variante von Folgerung 3.7 für konvexe Mengen.

3.14. FOLGERUNG. *Es sei X ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum und K, $L \subset X$ seien disjunkte konvexe Mengen. Wenn K kompakt und L abgeschlossen ist, dann existiert $\varphi \in X'$ mit $\|\varphi\| = 1$, so dass*

$$0 < d(K, L) = \inf_{y\in L} \varphi(y) - \sup_{x\in K} \varphi(x) .$$

3.15. DEFINITION. Ein topologischer Raum M heißt *separabel,* wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge enthält.

Da auch metrische Räume und insbesondere auch normierte Vektorräume eine Topologie tragen, überträgt sich dieser Begriff auch auf metrische Räume und normierte Vektorräume.

3.16. BEISPIEL. Für offene Teilmengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist der Raum $C^0_0(\Omega)$ separabel. Da $C^0_0(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ nach Satz 1.30 dicht ist für $1 \leq p < \infty$, sind die Räume $L^p(\Omega)$ für $p < \infty$ ebenfalls separabel. Auf der anderen Seite werden wir später sehen, dass $L^\infty(\Omega)$ nicht separabel ist.

3.17. FOLGERUNG. *Es sei X ein normierter Vektorraum. Wenn X' separabel ist, ist auch X separabel.*

3.18. PROPOSITION. *Es sei X ein normierter Vektorraum und $V \subset X$ ein endlich-dimensionaler Unterraum. Dann existiert ein Komplement $W \subset X$, das heißt, $X = V \oplus W$, und die Normen auf X und $V \oplus W$ sind äquivalent. Außerdem ist W abgeschlossen.*

Zum Schluss kommen wir noch einmal auf Beispiel 0.1 aus der Einleitung zurück.

3.19. SATZ. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, konvex und mit glattem Rand, es sei Δ der Laplace-Operator, $c \in \mathbb{R}$ und $0 < \alpha < 1$. Dann ist das Bild des Operators*

$$L = \Delta + c\colon C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \cap C^0_0(\Omega) \longrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$$

abgeschlossen.

KAPITEL 4

Der Kategoriensatz von Baire

In diesem Kapitel geht es vor allem um Abbildungseigenschaften von stetigen Abbildungen zwischen Banachräumen. Unter anderem beweisen wir den Satz von Banach-Steinhaus, zeigen, dass stetige surjektive lineare Abbildungen offen sind, und formulieren den Satz vom abgeschlossenen Graphen. Motiviert von diesem Satz definieren wir auch unbeschränkte Operatoren. Dabei orientieren wir uns an [**7**, Kap. 4] und [**8**, Kap. 3].

4.1. Definition. Eine Teilmenge A eines topologischen Raumes M heißt *nirgend dicht,* wenn ihr Abschluss keine inneren Punkte enthält.

Eine abzählbare Vereinigung nirgends dichter Teilmengen heißt *mager* oder *von erster* (*Baire-*) *Kategorie.* Eine Menge heißt *fett* oder *von zweiter* (*Baire-*) *Kategorie,* wenn sie nicht mager ist.

Ein typisches Beispiel einer mageren Menge ist $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

4.2. Satz (Baire). *Eine magere Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes hat keine inneren Punkte.*

4.3. Bemerkung. Vollständigkeit ist notwendig. Beispielsweise ist $\mathbb{Q}$ mit der üblichen Metrik eine abzählbare Vereinigung nirgends dichter Teilmengen.

4.4. Lemma. *Es sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum, Y ein normierter Vektorraum und $\mathcal{F} \subset C^0(M, Y)$ eine* punktweise beschränkte *Teilmenge, das heißt, für alle Punkte $p \in M$ gilt*

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f(p)\| < \infty \,.$$

Dann gibt es eine nichtleere offene Menge $U \subset M$, auf der $\mathcal{F}$ gleichmäßig beschränkt ist, das heißt,

$$\sup_{p \in U} \sup_{f \in \mathcal{F}} \|f(p)\| < \infty \,.$$

4.5. Satz (Banach-Steinhaus; Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit). *Es sei X ein Banachraum, Y ein normierter Vektorraum und $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ sei punktweise beschränkt. Dann ist $\mathcal{F}$* gleichmäßig beschränkt, *das heißt,*

$$\sup_{T \in \mathcal{F}} \|T\|_{\mathrm{op}} < \infty \,.$$

4.6. Definition. Eine Abbildung $f\colon M \to N$ zwischen topologischen Räumen heißt *offen,* wenn für alle offenen Teilmengen $U \subset M$ die Bildmenge $f(U) \subset N$ ebenfalls offen ist.

4.7. Satz (Banach-Schauder; von der offenen Abbildung). *Es seien X, Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dann ist T genau dann offen, wenn T surjektiv ist.*

4.8. Folgerung (Satz von der inversen Abbildung). *Es seien X, Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dann besitzt T genau dann eine stetige Umkehrabbildung, wenn T bijektiv ist.*

4.9. Folgerung (Äquivalenz von Normen). *Es sei X ein Banachraum sowohl bezüglich einer Norm $\|\cdot\|_0$ als auch bezüglich $\|\cdot\|_1$. Falls eine Konstante $C > 0$ existiert, so dass $\|\cdot\|_0 \le C \, \|\cdot\|_1$, sind $\|\cdot\|_0$ und $\|\cdot\|_1$ bereits äquivalent.*

4.10. Definition. Es sei $f\colon M \to N$ eine Abbildung, dann definieren wir ihren *Graphen*

$$\operatorname{Gr}(f) = \left\{ (p, f(p)) \;\middle|\; p \in M \right\} \subset M \times N \,.$$

Falls X, Y normierte Vektorräume sind, trägt $X \times Y$ ebenfalls eine Norm, und wir bezeichnen diesen normierten Vektorraum mit $X \oplus Y$ wie in der linearen Algebra, siehe Übungen. Wenn $T\colon X \to Y$ linear ist, ist $\operatorname{Gr}(T) \subset X \oplus Y$ ein Untervektorraum.

4.11. Satz (vom abgeschlossenen Graphen). *Es seien X und Y Banachräume und $T\colon X \to Y$ linear. Dann ist T genau dann stetig, wenn der Graph $\operatorname{Gr}(T) \subset X \oplus Y$ abgeschlossen ist.*

4.12. Satz. *Es seien V, W Unterräume eines Banachraums X, so dass V, W und $V + W$ in X abgeschlossen sind. Dann existiert eine Konstante $C > 0$, so dass sich jeder Vektor $x \in V + W$ als $x = v + w$ schreiben lässt mit $v \in V$, $w \in W$ und*

$$\|v\| \le C\,\|x\| \qquad \textit{und} \qquad \|w\| \le C\,\|x\| \,.$$

4.13. Satz (Helliger-Toeplitz). *Es sei H ein Hilbertraum und $A\colon H \to H$ sei linear und selbstadjungiert, das heißt, für alle x, $y \in H$ gilt $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$. Dann ist A stetig.*

KAPITEL 5

Unbeschränkte Operatoren und ihre Adjungierten

In der Praxis möchte man oft Operatoren betrachten, die nicht auf dem gesamten Banachraum definiert sind, beispielsweise bei Eigenwertproblemen. Diese Operatoren sind oft nicht beschränkt, können aber einen abgeschlossenen Graphen haben. Ihre Adjungierten haben oft ähnliche Eigenschaften. Als Beispiel konstruieren wir Sobolev-Räume und schwache Ableitungen, die zu klassischen Ableitungen adjungiert sind. Das liefert auch einen neuen Zugang zum Problem in Beispiel 0.1.

5.1. Definition. Es seien X, Y Banachräume. Ein *unbeschränkter Operator* $A\colon D(A) \subset X \to Y$ ist ein Paar aus einem Unterraum $D(A) \subset X$ und einer linearen Abbildung $A\colon D(A) \to X$.

Man nennt $D(A)$ den Definitionsbereich („domain"), $R(A) = \operatorname{im} A \subset Y$ das Bild („range"), $N(A) = \ker A \subset D$ den Kern („null space") und

$$\operatorname{Gr}(A) = \bigl\{\, (x, Ax) \bigm| x \in D(A) \,\bigr\} \subset X \oplus Y$$

den *Graph* von A.

Ein unbeschränkter Operator A heißt *dicht definiert,* wenn $D(A) \subset X$ dicht liegt, und *abgeschlossen,* wenn $\operatorname{Gr}(A) \subset X \oplus Y$ abgeschlossen ist.

5.2. Bemerkung. Notation und Terminologie sind etwas unglücklich, aber üblich, und führen in der Regel nicht zu Missverständnissen.

(1) Beschränkte Operatoren $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ wie in Definition 1.14 und Proposition 1.15 sind auch unbeschränkte Operatoren im Sinne der obigen Definition mit $D(A) = X$. Umgekehrt würde man einen unbeschränkten Operator A nur dann beschränkt nennen, wenn sowohl $D(A) = X$ als auch $\|A\|_{\mathrm{op}} < \infty$ gilt.

(2) Wenn $D(A) = X$ gilt, ist A einfach eine lineare Abbildung. In diesem Fall ist A nach Satz 4.11 genau dann stetig, wenn A im obigen Sinne abgeschlossen ist. Für abgeschlossene Operatoren gilt immerhin

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x \text{ und } \lim_{k\to\infty} Ax_k = y \qquad \Longrightarrow \qquad x \in D(A) \text{ und } Ax = y$$

für alle Folgen $(x_k)_k$ in X. So gesehen betrachten wir abgeschlossene Operatoren als natürliche Verallgemeinerung stetiger Operatoren.

(3) Es ist für später wichtig zu verlangen, dass X und Y Banachräume sind. Andernfalls könnten wir einfach X durch den normierten Vektorraum $D(A)$ ersetzen, und auch Abgeschlossenheit wäre eine wesentlich schwächere Aussage, wenn $X \oplus Y$ kein Banachraum wäre.

(4) Die obige Definition hat nichts mit dem topologischen Begriff einer abgeschlossenen Abbildung zu tun. Beispielsweise gibt es abgeschlossene (sogar beschränkte) Operatoren A, bei nicht einmal $N(A) \subset Y$ abgeschlossen ist.

(5) In der Praxis sind die meisten unbeschränkten Operatoren dicht definiert. Und viele sind abgeschlossen, oder sind Einschränkungen abgeschlossener Operatoren auf dichte Unterräume des Definitionsbereichs.

5.3. Bemerkung. Es sei $A\colon D(A) \subset X \to Y$ ein unbeschränkter, abgeschlossener Operator. Dann ist $D(A)$, versehen mit der Graphennorm

$$\|x\|_{\mathrm{Gr}(A)} = \|x\|_X + \|Ax\|_Y$$

isometrisch zu $\mathrm{Gr}(A) \subset X \oplus Y$, also vollständig. Außerdem gilt

$$\big\|A\colon (D(A), \|\cdot\|_{\mathrm{Gr}(A)}) \to Y\big\|_{\mathrm{op}} \le 1 , \qquad \text{also} \qquad A \in \mathcal{L}\big((D(A), \|\cdot\|_{\mathrm{Gr}(A)}), Y\big) .$$

Unten konstruieren wir auf diese Weise Sobolev-Räume und schwache Ableitungen.

5.4. Beispiel. In der Quantenmechanik trifft man auf einige unbeschränkte Operatoren. Wir arbeiten hier in der sogenannten „Orts-Darstellung“, und bleiben der Einfachheit halber nicht-relativistisch. Dabei werden Teilchen zu einer festen Zeit nicht—wie in der klassischen Mechanik—durch ihre Position und ihren Impuls im $\mathbb{R}^3$ beschrieben, sondern durch „Wellenfunktionen“ $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$. Observablen wie Ort und Impuls sind in diesem Modell keine Koordinaten im $\mathbb{R}^3$ mehr, sondern unbeschränkte Operatoren auf $L^2(\mathbb{R}^3)$. Die möglichen Werte dieser Observablen sind (verallgemeinerte) Eigenwerte dieser Operatoren, und die Wellenfunktionen sind „unendliche Linearkombinationen“ (genauer: Banachraum-wertige Integrale) der zugehörigen Eigenvektoren. Das führt dazu, dass Teilchen zu einer gegebenen Zeit in der Regel weder einen wohldefinierten Ort noch einen wohldefinierten Impuls haben. Stattdessen kann man nur vorhersagen, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine Messung einen bestimmten Ort oder Impuls liefert.

(1) Es sei $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$ die $\mathbb{C}$-wertige Wellenfunktion eines Teilchens. In der Ortsdarstellung beschreibt $|\psi(x)|^2$ die Wahrscheinlichkeitsdichte, das Teilchen am Ort x anzutreffen. Da die Gesamtwahrscheinlichkeit 1 sein soll, nehmen wir also

$$\|\psi\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^3} |\psi|^2 \, d\lambda = 1$$

an. Wenn das Teilchen sich genau am Ort y befände, wäre

$$\int_A |\psi|^2 \, d\lambda = \begin{cases} 1 & y \in A , \\ 0 & y \notin A \end{cases}$$

für alle Lebesgue-messbaren Mengen $A \subset \mathbb{R}^3$. In diesem Fall wäre ψ eine Eigenfunktion des „Ortsoperators“ $\hat{x}_j = x_j \cdot$ zum Eigenwert y_j für $j = 1, \dots, 3$. Allerdings existieren keine L^2-Funktionen mit dieser Eigenschaft, und nicht für alle $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$ gilt $\hat{x}_j\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$.

(2) *Impulsoperatoren* leiten Wellenfunktionen in räumliche Richtungen ab:

$$\hat{p}_k\psi = -i\hbar\,\partial_k\psi \qquad \text{für } k = 1, \dots, 3,$$

dabei ist $\hbar$ die Planck-Konstante, die man in der theoretischen Physik (durch Wahl geeigneter Maßeinheiten) gern durch 1 ersetzt.

Ein Teilchen hätte genau den „Impuls“ $q \in \mathbb{R}^3$, wenn $\hat{p}_k\psi = q_k\,\psi$ für $k = 1, \dots, 3$. Das sind drei Differentialgleichungen, deren gemeinsame Lösungen genau die Form

$$\psi(x) = c\, e^{i\langle q, x\rangle}$$

haben, mit $c \in \mathbb{C}$. Außer für $c = 0$ liegen diese Funktionen allerdings nicht in $L^2(\mathbb{R}^3)$. Außerdem lässt sich auch $\hat{p}_k\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$ nicht für alle $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$ definieren.

(3) Es gilt die sogenannte *Heisenbergsche Unschärferelation*

$$[\hat{x}_j, \hat{p}_k] = \big[x_j, -i\hbar\partial_k\big] = i\hbar\,\delta_{jk} ,$$

das heißt, egal auf welchem Raum wir die obigen Operatoren definieren, gibt es keine Wellenfunktion, die gleichzeitig Eigenfunktion von $\hat{x}_j$ und $\hat{p}_j$ ist. Mit anderen Worten kann ein Teilchen nicht gleichzeitig an einem bestimmten Ort sein und einen bestimmten Impuls haben.

(4) Die zeitliche Entwicklung eines Teilchens wird durch seinen sogenannten *Hamilton-Operator* beschrieben. Im Falle eines skalaren Teilchens der Masse m in einem gegebenen Potential $V\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ könnte dieser beispielsweise die Gestalt

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\Delta + V$$

haben, wobei Δ wieder den Laplace-Operator bezeichne.

Für eine zeitabhängige Wellenfunktion $\psi\colon \mathbb{R} \to L^2(\mathbb{R}^3)$ gilt dann die *Schrödinger-Gleichung*

$$i\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\psi = \hat{H}\psi\ .$$

Wieder haben wir das Problem, dass $\hat{H}$ nicht für alle $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$ definiert ist.

Als gemeinsamen Definitionsbereich für alle obigen Operatoren wählen wir den Raum der „Testfunktionen“ $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Wir wissen bereits, dass $C_0^0(\mathbb{R}^3) \subset L^2(\mathbb{R}^3)$ dicht liegt. Indem wir glatte statt stetige Abschneidefunktionen verwenden, liefert der Beweis von Satz 1.30 völlig analog, dass $C_0^\infty(\mathbb{R}^3) \subset L^2(\mathbb{R}^3)$ dicht liegt. Wir erhalten also dicht definierte unbeschränkte Operatoren.

Auf der anderen Seite liegen die verallgemeinerten Eigenfunktionen der obigen Operatoren in der Regel in deutlichen größeren Räumen, auf die wir hier nicht eingehen wollen.

Im Folgenden wollen wir lernen, mit linearen Abbildungen umzugehen, die nicht auf dem ganzen Banach-Raum definiert sind. Als erstes brauchen wir eine Methode, um abgeschlossene Operatoren zu konstruieren.

5.5. Bemerkung. Wir erinnern uns an adjungierte Operatoren in der linearen Algebra. Seien X, Y endlich-dimensionale Vektorräume, dann sind auch X', Y' endlich-dimensional. Sei $F\colon X \to Y$ linear, dann definiert man die *Adjungierte* $F^*\colon Y' \to X'$ durch

$$F^*\beta = \bigl(x \mapsto \beta(Fx)\bigr) \in X' \qquad \text{für alle } \beta \in Y'\ .$$

Ein lineares Gleichungssystem $F(x) = b$ mit $b \in Y$ hat genau dann eine Lösung $x \in X$, wenn $b \in \operatorname{im} F$. Für $V \subset Y'$ sei

$$V^\perp = \bigl\{\, y \in Y \bigm| \beta(y) = 0 \text{ für alle } \beta \in V \,\bigr\}\ .$$

Man überprüft leicht, dass $\operatorname{im} F \subset (\ker F^*)^\perp$. Aus dem Rangsatz der linearen Algebra folgt Gleichheit. Also hat $F(x) = b$ genau dann eine Lösung, wenn $b \in (\ker F^*)^\perp$.

Wir wollen Adjungierte unbeschränkter Operatoren definieren. Sei also $A\colon D(A) \subset X \to Y$ unbeschränkter Operator. Für $\beta \in Y'$ und $x \in D(A)$ schreiben wir

$$(F^*\beta)(x) = \beta(F(x))\ .$$

Dieser Ausdruck ist nach Proposition 1.15 nur dann stetig auf $D(A)$, also ein Element des Dualraums $D(A)'$ nach Definition 1.19, wenn er beschränkte Operatornorm hat. In diesem Fall lässt sich $F^*\beta$ auf $\overline{D(A)} \subset X$ fortsetzen. Wenn wir $F^*\beta \in X'$ erhalten möchten, müssen wir also voraussetzen, dass A dicht definiert ist.

5.6. Definition. Es sei $A\colon D(A) \subset X \to Y$ ein dicht definierter unbeschränkter Operator. Dann definieren wir den *adjungierten Operator* $A^*\colon D(A^*) \subset Y' \to X'$ mit

$$D(A^*) = \bigl\{\, \beta \in Y' \bigm| \|\beta \circ A\colon D(A) \to \Bbbk\|_{\mathrm{op}} < \infty \,\bigr\}\ ,$$

indem wir $\beta \circ A\colon D(A) \to \Bbbk$ stetig zu $A^*\beta \in X'$ fortsetzen.

5.7. Proposition. *Sei $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ ein beschränkter Operator. Dann ist auch A^* beschränkt, und es gilt $\|A^*\|_{\mathrm{op}} = \|A\|_{\mathrm{op}}$.*

Der Graph des adjungierten Operators A^* ergibt sich unmittelbar aus dem Graphen von A. Dazu führen wir die folgenden Begriffe ein.

5.8. Definition. Es sei X ein normierter Vektorraum und $U \subset X$, $V \subset X'$ seien Unterräume. Dann definieren wir

(1) das *Orthogonalkomplement*

$$U^\perp = \big\{\, \alpha \in X' \;\big|\; \alpha(x) = 0 \text{ für alle } x \in U \,\big\} \subset X' ,$$

(2) das *Präorthogonalkomplement*

$$V^\perp = \big\{\, x \in X \;\big|\; \alpha(x) = 0 \text{ für alle } \alpha \in V \,\big\} \subset X ,$$

(3) die *Biorthogonalkomplemente* $U^{\perp\perp} = (U^\perp)^\perp \subset X$ und $V^{\perp\perp} = (V^\perp)^\perp \subset X'$.

Die Notation ist wieder etwas unglücklich, da $V^\perp$ und $U^{\perp\perp}$ genausogut Unterräume von X'' sein könnten. In der Tat arbeitet es sich mit diesen Komplementen auch am einfachsten in reflexiven Banachräumen.

5.9. Proposition. *Es sei X ein normierter Vektorraum und $U \subset X$, $V \subset X'$ seien Unterräume. Dann sind $U^\perp \subset X'$ und $V^\perp \subset X$ abgeschlossen, und es gilt*

$$U^{\perp\perp} = \overline{U} \subset X \qquad \textit{und} \qquad V^{\perp\perp} \supset \overline{V} \subset X' .$$

Wenn X ein reflexiver Banachraum ist, gilt auch in der zweiten Aussage Gleichheit.

Seien X, Y normierte Vektorräume, dann definieren wir eine Isometrie

$$J \colon X \oplus Y \longrightarrow Y \oplus X \qquad \text{durch } J(x,y) = (-y,x) .$$

5.10. Proposition. *Es sei $A \colon D(A) \subset X \to Y$ ein dicht definierter unbeschränkter Operator. Dann ist A^* abgeschlossen, und es gilt*

$$J\,\mathrm{Gr}(A^*) = \mathrm{Gr}(A)^\perp \subset X' \oplus Y' .$$

5.11. Proposition. *Es sei $A \colon D(A) \subset X \to Y$ ein dicht definierter, abgeschlossener, unbeschränkter Operator, und Y sei reflexiv. Dann ist A^* dicht definiert.*

Es sei $A \colon D(A) \subset X \longrightarrow Y$ dicht definiert und abgeschlossen. Im Folgenden betrachten wir $E = X \oplus Y$ mit den abgeschlossenen Unterräumen

$$G = \mathrm{Gr}(A) \qquad \text{und} \qquad L = X \oplus 0 .$$

Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} N(A) \oplus 0 &= G \cap L \subset E , \\ X \oplus R(A) &= G + L \subset E , \\ 0 \oplus N(A^*) &= G^\perp \cap L^\perp \subset E' , \\ R(A^*) \oplus Y' &= G^\perp + L^\perp . \end{aligned}$$

5.12. Bemerkung. Für abgeschlossene Unterräume G, L eines Banachraumes E sind $G+L$ und $G^\perp + L^\perp$ nicht automatisch abgeschlossen. Es gilt aber stets

$$G \cap L = (G^\perp + L^\perp)^\perp \subset E\,, \tag{1}$$

$$G^\perp \cap L^\perp = (G+L)^\perp \subset E'\,, \tag{2}$$

$$(G \cap L)^\perp \supset \overline{G^\perp + L^\perp} \subset E'\,, \tag{3}$$

$$(G^\perp \cap L^\perp)^\perp = \overline{G+L} \subset E\,. \tag{4}$$

5.13. Proposition. *Es sei $A\colon D(A) \subset X \to Y$ ein abgeschlossener, dicht definierter unbeschränkter Operator. Dann gilt*

$$N(A) = R(A^*)^\perp\,, \tag{1}$$

$$N(A^*) = R(A)^\perp\,, \tag{2}$$

$$N(A)^\perp \supset \overline{R(A^*)}\,, \tag{3}$$

$$N(A^*)^\perp = \overline{R(A)}\,. \tag{4}$$

Man beachte, dass es sogar Beispiele stetiger Operatoren gibt, für die die Inklusion $\overline{R(A^*)} \subset N(A)^\perp$ strikt ist.

Die folgenden Resultate beweisen wir nur vollständig für den Fall, dass X und Y reflexive Banachräume sind.

5.14. Satz. *Es seien G, L abgeschlossene Unterräume eines Banachraums E. Dann sind äquivalent:*

(1) *$G+L$ ist abgeschlossen in E;*
(2) *$G^\perp + L^\perp$ ist abgeschlossen in E';*
(3) *$G+L = (G^\perp \cap L^\perp)^\perp \subset E$;*
(4) *$G^\perp + L^\perp = (G\cap L)^\perp \subset E'$.*

Analog zum letzten Absatz von Bemerkung 5.5 gilt für unbeschränkte Operatoren das folgende Resultat von Banach.

5.15. Satz (vom abgeschlossenen Bild). *Es sei $A\colon D(A) \subset X \to Y$ ein abgeschlossener, dicht definierter unbeschränkter Operator. Dann sind äquivalent:*

(1) *$R(A)$ ist abgeschlossen;*
(2) *$R(A^*)$ ist abgeschlossen;*
(3) *$R(A) = N(A^*)^\perp$;*
(4) *$R(A^*) = N(A)^\perp$;*

5.16. Folgerung. *Es sei $A\colon D(A) \subset X \to Y$ ein abgeschlossener, dicht definierter unbeschränkter Operator. Dann sind äquivalent:*

(1) *A ist surjektiv, also $R(A) = Y$;*
(2) *Es gibt $C > 0$, so dass für alle $\beta \in D(A^*)$ gilt*

$$\|\beta\|_{Y'} \le C\, \|A^*\beta\|_{X'}\;;$$

(3) *$N(A^*) = 0$ und $R(A^*)$ ist abgeschlossen.*

5.17. Folgerung. *Es sei $A\colon D(A) \subset X \to Y$ ein abgeschlossener, dicht definierter unbeschränkter Operator. Dann sind äquivalent:*

(1) *A^* ist surjektiv, also $R(A^*) = X'$;*

(2) *Es gibt $C > 0$, so dass für alle $x \in D(A)$ gilt*

$$\|x\|_X \leq C \, \|Ax\|_Y \;;$$

(3) *$N(A) = 0$ und $R(A)$ ist abgeschlossen.*

Wir wollen uns das Adjungierte der negativen partiellen Ableitung

$$-\partial_i \colon C_0^1(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$$

anschauen. Dazu sei zunächst $f \in C_0^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ und $g \in C_0^1(\mathbb{R}) \cap L^q(\mathbb{R})$, wobei $1 < p$, $q < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Wir beweisen später, dass $L^q(\mathbb{R})$ reflexiv ist mit $L^p(\mathbb{R}) = L^q(\mathbb{R})'$. Nach den Proposition 5.10 ist das Adjungierte $-\partial^*$ der negativen Ableitung $-\partial \colon C_0^1(\mathbb{R}) \cap L^q(\mathbb{R}) \to L^q(\mathbb{R})$ ein abgeschlossener, unbeschränkter Operator auf L^p. Da $C_0^\infty(\mathbb{R})$ in $L^q(\mathbb{R})$ für $q < \infty$ dicht liegt, ist $-\partial^*$ für $q < \infty$ auch dicht definiert, nicht jedoch für $q = \infty$ (Übungen). Partielle Integration liefert

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,(-g'(x))\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \big(-(fg)'(x) + f'(x)\,g(x)\big)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\,g(x)\,dx \;,$$

also setzt $-\partial^*$ die gewöhnliche Ableitung fort. Der Operator $-\partial^*$ heißt auch *schwache Ableitung,* und wir benutzen später die Bezeichnung ∂ auch für diesen Operator. Die Graphennorm aus Bemerkung 5.3 hat die Gestalt

$$\|f\|_{\mathrm{Gr}(-\partial)^*} = \|f\|_{L^p} + \|\partial f\|_{L^p}$$

für alle $f \in D(-\partial^*)$.

5.18. Definition. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $p \in [1,\infty]$ und $1 \leq i \leq n$. Eine Funktion $f \in L^p(\Omega)$ heißt *schwach differenzierbar* in Richtung x_i, wenn eine *schwache Ableitung* $f_i \in L^p(\Omega)$ existiert, so dass für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ gilt

$$\int_\Omega f_i\,\varphi\,d\lambda = -\int_\Omega f\,\partial_i\varphi\,d\lambda \;.$$

Sie heißt *schwach differenzierbar,* wenn sie für $i = 1, \dots n$ schwach differenzierbar ist. Wir definieren den *Sobolev-Raum*

$$W^{1,p}(\Omega) = \big\{\, f \in L^p(\Omega) \;\big|\; f \text{ schwach differenzierbar mit } f_i \in L^p(\Omega) \text{ für } i = 1, \dots, n \,\big\} \;,$$

und versehen ihn mit der *Sobolev-Norm*

$$\|f\|_{W^{1,p}} = \|f\|_{L^p} + \sum_{i=1}^n \|f_i\|_{L^p} \;.$$

Die Operatoren $\partial_i \colon W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)$ mit $\partial_i f = f_i$ heißen *schwache* (*Richtungs-*) *Ableitungen.*

Analog zu den Räumen $C^{k,\alpha}$ können wir auch höhere Sobolev-Räume $W^{k,p}(\Omega)$ mit entsprechenden Sobolev-Normen betrachten. Im Spezialfall $p = 2$ schreibt man oft H^k an Stelle von $W^{k,2}$. Die Norm $\|f\|_{H^1}$ ist äquivalent zur Norm zum Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle_{H^1} = \langle f, g\rangle_{L^2} + \sum_{i=1}^n \langle f_i, g_i\rangle_{L^2} \;.$$

Das gleiche gilt für die Normen $\|f\|_{H^k}$ für $k \geq 2$.

5.19. Proposition. *Die Räume $W^{k,p}(\Omega)$ sind Banachräume für $1 \leq p \leq \infty$ und $k \in \mathbb{N}$. Die Räume $H^k(\Omega)$ sind Hilberträume für alle $k \in \mathbb{N}$.*

Wir betrachten zum Schluss selbstadjungierte Operatoren $A\colon D(A) \subset H \to H$ auf einem Hilbertraum H. Dabei nehmen wir für den Moment den Rieszschen Darstellungssatz vorweg, wonach $H \cong H'$ gilt mit $x \mapsto \langle x, \cdot \rangle$.

5.20. Definition. Es sei H ein Hilbertraum und $A\colon D(A) \subset H \to H$ ein dicht definierter unbeschränkter Operator. Dann heißt A

(1) *formal selbstadjungiert* oder *symmetrisch,* wenn $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$ für alle x, $y \in D(A)$ gilt;
(2) *selbstadjungiert,* wenn er formal selbstadjungiert ist und $D(A) = D(A^*)$ gilt;
(3) *wesentlich selbstadjungiert,* wenn der Abschluss $\bar{A}$ selbstadjungiert ist.

Die letzte Definition ist sinnvoll, denn man kann zeigen, dass symmetrische Operatoren A immer einen Abschluss $\bar{A}$ besitzen in dem Sinne, dass $\overline{\mathrm{Gr}(A)} = \mathrm{Gr}(\bar{A})$. Im endlich-dimensionalen gibt es zwischen den obigen Begriffen keinen Unterschied.

5.21. Beispiel. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte offene konvexe Menge mit glattem Rand $\partial\Omega$ (konvex ist nicht wirklich nötig), dann trägt $\partial\Omega$ ein Oberflächenmaß σ und es gibt einen glatten äußeren Normalenvektor $\nu\colon \partial\Omega \to S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Wir benutzen ohne Beweis, dass Funktionen $f \in H^1(\Omega)$ „Randwerte“ $f|_{\partial\Omega} \in L^2(\partial\Omega)$ haben (allgemeine Elemente von $L^2(\Omega)$ jedoch nicht, da man sie auf Nullmengen wie $\partial\Omega$ beliebig abändern darf). Für $f \in H^2(\Omega)$ ist auch die schwache normale Ableitung $\partial_\nu f \in L^2(\partial\Omega)$ definiert. All das reicht, um die *Greensche Formel* für f, $g \in H^2(\Omega)$ mit Hilfe des Divergenzsatzes von Gauß zu beweisen:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Delta f\, g\, d\lambda &= -\sum_{i=1}^n \int_\Omega \partial_i f\, \partial_i g\, d\lambda + \int_{\partial\Omega} \partial_\nu f\, g\, d\sigma \\ &= \int_\Omega f\, \Delta g\, d\lambda + \int_{\partial\Omega} \bigl(\partial_\nu f\, g - f\, \partial_\nu g\bigr)\, d\sigma\;.\end{aligned}$$

Wir betrachten den Laplace-Operator $\Delta\colon C_0^\infty(\Omega) \to \Omega$ als unbeschränkten Operator.

(1) Nach der Greenschen Formel ist Δ symmetrisch.
(2) Der adjungierte Operator Δ^* ist nicht symmetrisch, da $H^2(\Omega) \subset D(\Delta^*)$.
(3) Daher ist Δ nicht wesentlich selbstadjungiert.
(4) *Dirichlet-Randbedingung.* Der folgende Operator ist symmetrisch:
$$\Delta\colon \bigl\{\, f \in H^2(\Omega) \bigm| f|_{\partial\Omega} = 0 \,\bigr\} \subset L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)\;.$$
(5) *Neumann-Randbedingung.* Der folgende Operator ist ebenfalls symmetrisch:
$$\Delta\colon \bigl\{\, f \in H^2(\Omega) \bigm| \partial_\nu f = 0 \,\bigr\} \subset L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)\;.$$

5.22. Bemerkung. Es sei $A = \Delta$ der Laplace-Operator mit Dirichlet-Randbedingung. Man kann zeigen, dass
$$\|f\|_{H^2} \le C\, \|Af\|_{L^2}$$
für eine Konstante $C > 0$ und alle $f \in D(A)$ (eine ähnliche Abschätzung für Höldernormen haben wir in Bemerkung 2.21 gesehen). Nach Folgerung 5.17 ist der Operator A^* surjektiv. Wenn wir also zeigen könnten, dass A selbstadjungiert ist, dann wüssten wir bereits, dass das Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned}\Delta f &= g &&\text{auf } \Omega\;,\\ f &= 0 &&\text{auf } \partial\Omega\end{aligned}$$

für alle $g \in L^2(\Omega)$ eine eindeutige Lösung in $H^2(\Omega)$ besitzt.

KAPITEL 6

Hilberträume

Hilberträume sind (nach den endlich-dimensionalen Vektorräumen) die einfachsten Banachräume überhaupt. Reelle Hilberträume sind in der Analysis manchmal hilfreich, und komplexe Hilberträume sind sehr wichtig in der theoretischen Physik. Die meisten Resultate in diesem Abschnitt formulieren wir daher sowohl für $\Bbbk = \mathbb{R}$ als auch für $\Bbbk = \mathbb{C}$.

Wir zeigen unter anderem, dass Hilberträume immer reflexiv sind. Außerdem „lösen" wir das Dirichlet-Problem $\Delta f = g$ aus Beispiel 0.1 in $H_0^1(\Omega)$.

6.1. Satz. *Es sei H ein Hilbertraum, $M \subset H$ eine nicht-leere abgeschlossene konvexe Teilmenge und $x \in H$. Dann existiert ein eindeutiger Punkt $y = P_M(x) \in M$, der den Abstand zu x unter allen Punkten in M minimiert.*

Die Abbildung $P_M \colon H \to M$ ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante 1.

6.2. Folgerung (Projektionssatz). *Es sei $U \subset H$ abgeschlossener Unterraum eines Hilbertraums. Dann existiert ein abgeschlossener Unterraum $V = U^\perp \subset H$, so dass $H = U \oplus V$ und $U \perp V$.*

In der Notation von Satz 6.1 ist $V = \ker P_U$, und wir können jedes Element $x \in H$ zerlegen als

$$x = P_U(x) + P_V(x) \qquad \text{mit } P_U(x) \in U,\ P_V(x) \in V \text{ und } \langle u, v\rangle = 0\ .$$

6.3. Bemerkung. Man nennt $U^\perp$ auch *Orthogonalkomplement* von U.

(1) Im Rieszschen Darstellungssatz konstruieren wir einen Isomorphismus $H \cong H'$. Dieser Isomorphismus überführt das obige Orthogonalkomplement in das aus Definition 5.8.
(2) In allgemeinen Banachräumen haben nicht alle abgeschlossenen Unterräume Komplemente. Tatsächlich ist die Norm eines Banachraums, in dem jeder abgeschlossene Unterraum ein Komplement besitzt, bereits äquivalent zu einer Hilbert-Norm nach einem Satz von Lindenstrauss und Tzafriri (das schließt natürlich den Spezialfall endlich-dimensionaler Vektorräume mit ein).

Eine antilineare Abbildung $F \colon V \to W$ zwischen $\mathbb{C}$-Vektorräumen ist eine additive Abbildung, die anstelle von Homogenität die Relation $F(\lambda x) = \bar\lambda\, F(x)$ für alle $x \in V$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ erfüllt.

6.4. Satz (Rieszscher Darstellungssatz). *Es sei H ein Hilbertraum. Dann existiert eine antilineare Isometrie $\Phi \colon H \to H'$, so dass*

$$\langle x, y\rangle = \Phi(x)(y) \qquad \textit{für alle } x,\ y \in H\ .$$

Insbesondere lässt sich jedes Element $\alpha \in H'$ durch einen Vektor $x \in H$ *darstellen* in dem Sinne, dass $\alpha = \langle x, \cdot\,\rangle$.

6.5. Folgerung. *Insbesondere ist auch H' ein Hilbertraum mit Skalarprodukt*

$$\langle \alpha, \beta\rangle = \langle \Phi^{-1}\beta, \Phi^{-1}\alpha\rangle\ ,$$

und H ist reflexiv.

Wenn wir anstelle von Φ auch über $\Bbbk = \mathbb{C}$ eine lineare Abbildung haben möchten, müssen wir anstelle von H' den sogenannten Antidualraum betrachten.

6.6. Definition. Es sei X ein normierter Vektorraum über $\mathbb{C}$ und $X_{\mathbb{R}}$ sei X, aufgefasst als $\mathbb{R}$-Vektorraum.
Der *Antidualraum* von X ist der normierte $\mathbb{C}$-Vektorraum

$$\overline{X}' = \left\{ \alpha \in \mathcal{L}(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{C}) \;\middle|\; \alpha(ix) = -i\alpha(x) \text{ für alle } x \in X \right\} ,$$

versehen mit der Operatornorm.

6.7. Folgerung. *Es sei H ein komplexer Hilbertraum. Dann existiert eine lineare Isometrie $H \cong \overline{H}'$ mit $x \mapsto \langle\,\cdot\,, x\rangle$.*

6.8. Bemerkung. Wir haben im letzten Abschnitt adjungierte Operatoren kennengelernt. Es seien H und K Hilberträume und $A\colon D(A) \subset H \to K$ ein dicht definierter unbeschränkter Operator. Dann existiert ein Adjungierter Operator $A^*\colon D(A^*) \subset K \to H$, so dass

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle \qquad \text{für alle } x \in D(A) \text{ und alle } y \in D(A^*) \;.$$

Es gelten alle Resultate aus dem letzten Kapitel.

(1) Wenn A beschränkt ist, ist A^* nach Prop 5.7 beschränkt mit $\|A\|_{\mathrm{op}} = \|A^*\|_{\mathrm{op}}$.
(2) Wenn A abgeschlossen ist, ist $D(A^*) \subset K$ ein dichter Unterraum nach Proposition 5.11.
(3) Es gelten der Satz 5.15 vom abgeschlossenen Bild und die Folgerungen daraus.

Symmetrische und selbstadjungierte Operatoren haben wir in Definition 5.20 bereits eingeführt.

Wir wollen den Rieszschen Darstellungssatz auf weitere Bilinearformen ausdehnen, auch im Hinblick auf Anwendungen. Unter anderem müssen diese Bilinearformen nicht mehr symmetrisch sein. Dazu brauchen wir eine quantitative Version von „positiv definit“, und das ist der Begriff „koerziv.“

6.9. Definition. Sei H ein normierter Vektorraum. Eine Sesquilinearform $B\colon H \times H \to \mathbb{k}$ heißt

(1) *beschränkt,* wenn
$$\|B\| = \sup_{\|x\|\le 1} \sup_{\|y\|\le 1} |B(x,y)| < \infty ,$$
(2) und *koerziv,* wenn es eine Konstante $c > 0$ gibt, so dass
$$\operatorname{Re} B(x,x) \ge c\,\|x\|^2 \qquad \text{für alle } x \in H \;.$$

Man beachte: wenn B beschränkt und koerziv ist, ist $(x,y) \mapsto B(x,y) + \overline{B(y,x)}$ ein Skalarprodukt, und die zugehörige Norm ist bereits äquivalent zur gegebenen Norm auf H. Wenn H also vollständig ist, wird H dadurch zu einem Hilbertraum.

6.10. Lemma. *Es sei H ein Hilbertraum und B eine beschränkte Sesquilinearform. Dann existiert ein linearer Endomorphismus L von H mit $\|L\| = \|B\|$, so dass*

$$B(x,y) = \langle x, Ly\rangle \qquad \text{für alle } x,\, y \in H \;.$$

6.11. Satz (Lemma von Lax-Milgram). *Es sei H ein Hilbertraum und B eine beschränkte, koerzive Sesquilinearform Dann existiert ein antilinearer Isomorphismus $\Psi\colon H \to H'$, so dass*

$$B(x,y) = \Psi(x)(y) \qquad \text{für alle } x,\, y \in H \;,$$

und es gilt $\|\Psi\| = \|B\|$ und $\left\|\Psi^{-1}\right\|_{\mathrm{op}} \le c^{-1}$ für die Konstante c aus Definition 6.9 (2).

6.12. Definition. Es sei H ein Hilbertraum und I eine Menge. Eine Familie $(e_j)_{j\in I}$ von Vektoren in H heißt *Orthonormalsystem,* wenn $\langle e_j, e_j\rangle = \delta_{jk}$ für alle $j,\, k \in J$. Ein Orthonormalsystem heißt *vollständig* oder eine *Hilbertbasis,* wenn es einen dichten Unterraum von H aufspannt.

Wir interessieren uns fortan für den Fall, dass die Indexmenge die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist.

6.13. Proposition (Besselsche Ungleichung). *Es sei* $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *ein Orthonormalsystem in einem Hilbertraum* H *und* $U = \overline{\langle (e_j)_{j\in\mathbb{N}} \rangle} \subset H$ *der Abschluss des davon aufgespannten Unterraumes. Für jeden Vektor* $x \in H$ *gilt dann*

$$\|x\|^2 \geq \sum_{j=0}^{\infty} |\langle e_j, x\rangle|^2 \ , \tag{1}$$

$$\textit{und} \qquad P_U(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \langle e_j, x\rangle \, e_j \ . \tag{2}$$

Das Orthonormalsystem ist vollständig genau dann, wenn für alle $x \in H$ *in* (1) *Gleichheit gilt. In diesem Fall stellt* (2) *den Vektor* x *dar.*

6.14. Beispiel. Es sei $H = L^2([0,1];\mathbb{C})$, dann erhalten wir ein vollständiges Orthonormalsystem $(x \mapsto e^{2\pi i n x})_{n\in\mathbb{Z}}$.

6.15. Proposition. *Jeder separable Hilbertraum besitzt ein höchstens abzählbares Orthonormalsystem und ist daher isomorph zu* $\mathbb{k}^n$ *oder zu* $\ell^2(\mathbb{k})$.

Für eine Anwendung des Lemmas von Lax-Milgram brauchen wir eine Abschätzung aus der Analysis.

6.16. Definition. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $1 \leq p < \infty$, dann definiere

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)} \subset W^{1,p}(\Omega) \ ,$$

wobei $\overline{\cdot}$ den Abschluss bezüglich der Sobolev-Norm $\|\cdot\|_{W^{1,p}}$ aus Definition 5.18 bezeichne.

Es bezeichne Df den (schwachen) Gradienten einer Funktion $f \in W^{1,p}(\Omega)$.

6.17. Satz (Poincaré-Ungleichung). *Es sei* Ω *ein beschränktes Gebiet vom Durchmesser* $d < \infty$ *und* $1 \leq p < \infty$. *Dann gilt*

$$\|f\|_{L^p} \leq d \, \|Df\|_{L^p} \qquad \textit{für alle } f \in W_0^{1,p}(\Omega) \ .$$

Wir kommen jetzt zu einer Anwendung des Lemmas von Lax-Milgram. Da wir ein sehr einfaches Problem betrachten, würde auch der Rieszsche Darstellungssatz zur Lösung ausreichen.

6.18. Beispiel. Wir betrachten den Laplace-Operator Δ auf einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit glattem Rand. Wir wollen eine Lösung in einem Sobolevraum $H^k(\Omega)$ finden, zunächst mit k so klein wie möglich. Für f, $g \in C^2(\overline{\Omega})$ gilt ja

$$\int_\Omega \Delta f \, g \, d\lambda = -\sum_{i=1}^n \int_\Omega \partial_i f \, \partial_i g \, d\lambda + \int_{\partial\Omega} \partial_\nu f \, g \, d\sigma \ .$$

Wir wollen die rechte Seite als Bilinearform auffassen. Da der zweite Term nicht auf ganz $H^1(\Omega)$ definiert ist, nehmen wir Dirichlet-Randbedingungen ($f|_{\partial\Omega} = g|_{\partial\Omega} = 0$) an und betrachten

$$B(f,g) = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \partial_i f \, \partial_i g \, d\lambda \ .$$

Diese Bilinearform ist auf ganz $H^1(\Omega)$ definiert und beschränkt, aber nicht koerziv, da $B(1,1) = 0$.

Daher (und wegen der Dirichlet-Randbedingungen $f|_{\partial\Omega} = g|_{\partial\Omega} = 0$) arbeiten wir auf $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$. Es sei $d < \infty$ der Durchmesser von Ω. Aus der Poincaré-Ungleichung 6.17 folgt für $p = 2$, dass B auf $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$ koerziv ist, denn

$$B(f,f) \geq \frac{1}{d^2+1} \, \|f\|_{H_0^1}^2 \ .$$

Mit dem Lemma von Lax-Milgram (Satz 6.11) können wir das Dirichlet-Problem jetzt lösen. Nach dem Fundamentallemma der Variationsrechnung und dem Satz von Gauß ist $\Delta f = g$ für ein $f \in C^\infty(\Omega)$ mit $f|_{\partial\Omega} = 0$ äquivalent dazu, dass

$$0 = \langle g - \Delta f, \varphi \rangle_{L^2} = B(f, \varphi) + \langle g, \varphi \rangle_{L^2}$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, und die rechte Seite ist bereits für $f \in H_0^1(\Omega)$ erklärt. Da $C_0^\infty(\Omega)$ nach Konstruktion dicht liegt in $H_0^1(\Omega)$, ist das äquivalent zu

$$B(f, \,\cdot\,) + \langle g, \,\cdot\,\rangle_{L^2} = 0 \qquad \in H_0^1(\Omega)' \, .$$

Diese Gleichung heißt auch *schwache Formulierung* des Dirichlet-Problems.

Es sei $\Psi \colon H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)'$ die Abbildung aus dem Lemma von Lax-Milgram. Die obige Gleichung hat eine eindeutige Lösung in $H_0^1(\Omega)$, nämlich

$$f = -\Psi^{-1}\bigl(\langle g, \,\cdot\,\rangle_{L^2}\bigr) \qquad \in H_0^1(\Omega) \, .$$

Man nennt f eine „schwache Lösung“ von $\Delta f = g$, da der Ausdruck Δf nicht wohldefiniert ist. Als nächstes möchte man jetzt beweisen, dass f durch eine C^k-Funktion dargestellt werden kann, falls beispielsweise $g \in C^k(\Omega)$. Das ist möglich, aber recht viel Arbeit. Im Fall $k \geq 2$ wäre Δf definiert, und man würde f eine „starke Lösung“ nennen. Aus dem Obigen folgt immerhin die Eindeutigkeit einer starken Lösung.

KAPITEL 7

Schwache Topologien

Bisher haben wir auf normierten Vektorräumen stets die Norm-Topologie betrachtet, die wir unten auch „starke Topologie“ nennen werden. Diese Topologie ist uns zwar mittlerweile gut vertraut, aber sie hat vergleichsweise wenig kompakte Teilmengen. In manchen Bereichen der Mathematik, beispielsweise in der Variationsrechnung, möchte man Minimalfolgen betrachten und dann konvergente Teilfolgen auswählen können. In der starken Topologie ist das oft nicht möglich.

Betrachtet man die Definitionen von „Konvergenz“ oder auch „Kompaktheit“ genauer, so sieht man, dass es leichter ist, Konvergenz oder Kompaktheit zu zeigen, wenn man weniger offene Mengen zur Verfügung hat. Ziel dieses Abschnitts ist es, Topologien auf Banachräumen und ihren Dualräumenzu konstruieren, die zum einen deutlich weniger offene Mengen als die ursprüngliche „starke“ Topologie haben, zum anderen aber immer noch eine gewisse Aussagekraft.

Das Wort „schwach“ bedeutet hier (ähnlich wie in Beispiel 6.18), dass man die Bedingungen (dort an eine Lösung, hier an Konvergenz) derart abschwächt, dass man mit vergleichweise einfachen Mitteln erreicht, was man möchte (Existenz einer Lösung beziehungsweise Konvergenz einer Teilfolge). Und dort wie hier muss man hinterher noch vom „schwachen“ zu einem „starken“ Ergebnis kommen. Wir lernen mehrere Möglichkeiten kennen, um aus schwach konvergenten Folgen stark konvergente Folgen zu machen.

7.1. Definition. Es sei X ein Banachraum über $\Bbbk$ und X' sein Dualraum.

(1) Eine Folge $(x_k)_k$ in X *konvergiert schwach gegen* $x \in X$, kurz $x_k \rightharpoonup x$, wenn für alle $\alpha \in X'$ die Folge $(\alpha(x_k))_k$ in $\Bbbk$ gegen $\alpha(x)$ konvergiert.

(2) Eine Folge $(\alpha_k)_k$ in X' *konvergiert schwach* gegen* $\alpha \in X'$, kurz $\alpha_k \overset{*}{\rightharpoonup} \alpha$, wenn für alle $x \in X$ die Folge $(\alpha_k(x))_k$ in $\Bbbk$ gegen $\alpha(x)$ konvergiert.

Schwach*-Konvergenz (sprich: „schwach-Stern-Konvergenz“) ist das gleiche ist wie punktweise Konvergenz im Raum der Abbildungen $X \to \Bbbk$.

Wenn wir Elemente von X' als Koordinaten auf X auffassen, bedeutet schwache Konvergenz das gleiche wie „Konvergenz in Koordinaten.“

Konvergenz in der Norm auf X beziehungsweise X' impliziert immer schwache beziehungsweise schwach*-Konvergenz.

7.2. Beispiel. Wir betrachten den Hilbertraum ℓ^2. Es bezeichne $e^{(k)} = (\delta_{jk})_j \in \ell^2$ die „Standardbasisfolge“.

(1) Die Folge $(e^{(k)})_k$ divergiert in der Norm-Topologie, da $\left\|e^{(k)} - e^{(\ell)}\right\| = \sqrt{2}$ für alle $k \neq \ell$. Sie konvergiert jedoch schwach gegen $0 = (0)_j$. Sei nämlich $\alpha = \langle (y_j)_j, \,\cdot\,\rangle \in \ell^{2\prime}$, dann folgt aus der Konvergenz der Reihe $\sum_j |y_j|^2 = \|\alpha\|^2$, dass y_j eine Nullfolge ist. Insbesondere gilt
$$\lim_{k\to\infty} \alpha(e^{(k)}) = \lim_{k\to\infty} \sum_j \bar{y}_j \delta_{jk} = \lim_{k\to\infty} y_k = 0\ .$$

(2) Die Folge $(\langle e^{(k)}, \,\cdot\,\rangle)_k$ in $\ell^{2\prime}$ divergiert ebenfalls in der Norm-Topologie und konvergiert schwach* gegen 0.

(3) Eine gewisse Vorsicht mit schwach beziehungsweise schwach*-konvergenten Folgen ist stets geboten. Beispielsweise gilt

$$\langle e^{(k)}, e^{(k)} \rangle \longrightarrow 1 \in \Bbbk \qquad \text{obwohl } e^{(k)} \rightharpoonup 0 \text{ und } \langle e^{(k)}, \cdot\,\rangle \overset{*}{\rightharpoonup} 0\ .$$

Die Unterscheidung zwischen „schwach konvergent“ und „schwach* konvergent“ ist recht streng, so dass man Verwechslungen (wie zum Beispiel zwischen Orthogonal- und Präorthogonalkomplementen) vermeiden kann.

7.3. Bemerkung. Auf dem Dualraum X' gibt es auch den Begriff der schwachen Konvergenz, allerdings muss man dazu mit Elementen aus dem Bidualraum testen. Sei $\iota\colon X \to X''$ die natürliche Abbildung aus Definition 1.19. Dann haben wir

$$\begin{aligned} \alpha_k \rightharpoonup \alpha \qquad &\Longleftrightarrow \qquad \text{für alle } \omega \in X'' \text{ gilt } \lim_{k\to\infty} \omega(\alpha_k) = \omega(\alpha)\ , \\ \alpha_k \overset{*}{\rightharpoonup} \alpha \qquad &\Longleftrightarrow \qquad \text{für alle } \omega \in \operatorname{im}(\iota) \text{ gilt } \lim_{k\to\infty} \omega(\alpha_k) = \omega(\alpha)\ . \end{aligned}$$

Somit impliziert schwache Konvergenz in X' bereits schwach*-Konvergenz. Wenn X reflexiv ist, stimmen beide Begriffe überein.

Schwache (und schwach*-) Konvergenz lassen sich im Allgemeinen nicht durch eine Metrik beschreiben. Es gibt jedoch eine passende Topologie auf X beziehungsweise X', die wir hier charakterisieren wollen.

7.4. Satz und Definition (Initialtopologie). *Es sei M eine Menge, $(X_j)_{j\in I}$ eine Familie topologischer Räume und $(f_j\colon M \to X_j)_{j\in I}$ eine Familie von Abbildungen. Dann existiert genau eine Topologie $\mathcal{O}$ auf M, die* Initialtopologie zur Familie $(f_j\colon M \to X_j)$, *mit den folgenden Eigenschaften.*

(1) *Alle Abbildungen $f_j\colon M \to X_j$ sind stetig bezüglich $\mathcal{O}$.*
(2) *Sei Y ein topologischer Raum und $g\colon Y \to M$, dann ist g bezüglich $\mathcal{O}$ genau dann stetig, wenn alle Abbildungen $f_j \circ g\colon Y \to X_j$ stetig sind.*
(3) *Eine Teilmenge $U \subset M$ ist eine Umgebung von $p \in U$ genau dann, wenn eine endliche Teilmenge $I_0 \subset I$ und für alle $j \in I_0$ offene Teilmengen $U_j \subset X_j$ mit $f_j(p) \in U_j$ existieren, so dass*

$$p \in \bigcap_{j\in I_0} f_j^{-1}(U_j) \subset U\ .$$

(4) *Es sei*

$$\begin{aligned} &\mathcal{S} = \bigl\{\, f_j^{-1}(U_j) \bigm| j \in I, U_j \text{ offen in } X_j \,\bigr\} \subset \mathcal{P}(M) \\ \text{und} \qquad &\mathcal{B} = \bigl\{\, S_1 \cap \dots \cap S_N \bigm| N \in \mathbb{N}, S_1, \dots, S_N \in \mathcal{S} \,\bigr\} \subset \mathcal{P}(M)\ , \\ \text{dann ist} \qquad &\mathcal{O} = \Bigl\{ \bigcup \mathcal{U} \Bigm| \mathcal{U} \subset \mathcal{B} \Bigr\}\ . \end{aligned}$$

Die ersten beiden Eigenschaften charakterisieren die Topologie abstrakt. Eigenschaft (4) bedeutet, dass $\mathcal{S}$ eine *Subbasis* und $\mathcal{B}$ eine *Basis* von $\mathcal{O}$ ist. Dabei steht $\bigcup \mathcal{U}$ für $\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U$. Es bezeichne $\iota\colon X \to X''$ die natürliche Abbildung aus Definition 1.19.

7.5. Definition. Es sei X ein Banachraum über $\Bbbk$.

(1) Die *schwache Topologie* auf X ist die Initialtopologie zur Familie

$$\bigl(\alpha\colon X \to \Bbbk\bigr)_{\alpha\in X'}\ .$$

(2) Die *schwach*-Topologie* auf X' ist die Initialtopologie zur Familie

$$\bigl(\iota(x)\colon X' \to \Bbbk\bigr)_{x\in X}\ .$$

Im Folgenden nennen wir die Topologie auf X und X' aus Kapitel 1 die „starke Topologie“ oder „Normtopologie“. Wann immer es keine Verwirrung gibt, ersetzen wir die korrektere Formulierung „bezüglich der schwachen (schwach*- beziehungsweise starken) Topologie auf ...“ einfach durch das passende Adverb oder Adjektiv „schwach“, „schwach*“ beziehungsweise „stark“.

Aus Eigenschaft (2) in Satz 7.4 folgt, dass die Identität id_X von X mit der starken Topologie nach X mit der schwachen Topologie stetig ist. Analoges gilt für X' und die schwach*-Topologie. Das bedeutet, dass alle offenen Mengen der schwachen Topologie in der starken Topologie offen sind; umgekehrt gilt das jedoch im Allgemeinen nicht. Man sagt auch, die schwache Topologie sei „gröber“ als die starke, und die starke Topologie dementsprechend „feiner“ als die schwache.

Um zu verstehen, welche Folgen in einer Initialtopologie konvergieren, benutzen wir einen Trick. Wir betrachten die *Einpunktkompaktifizierung* $\mathbb{N}^+$ von $\mathbb{N}$. Das ist der Raum $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ mit der Topologie

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \cup \left\{ \mathbb{N}^+ \setminus E \;\middle|\; E \subset \mathbb{N} \text{ endlich} \right\} \quad \subset \quad \mathcal{P}(\mathbb{N}^+) .$$

Sei X ein beliebiger topologischer Raum. Eine Folge $(x_k)_k$ in X konvergiert gegen $x_\infty \in X$ genau dann, wenn die folgende Abbildung stetig ist:

$$g_{(x_\bullet)} \colon \mathbb{N}^+ \to X \qquad \text{mit} \qquad g_{(x_\bullet)}(k) = x_k \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}^+ .$$

7.6. Folgerung. *Es sei X ein Banachraum über $\Bbbk$.*

(1) *Eine Folge $(x_k)_k$ in X konvergiert genau dann schwach gegen $x_\infty \in X$, wenn sie in der schwachen Topologie gegen x_∞ konvergiert.*
(2) *Eine Folge $(\alpha_k)_k$ in X' konvergiert genau dann schwach* gegen $\alpha_\infty \in X'$, wenn sie in der schwach*-Topologie gegen α_∞ konvergiert.*

Zur Erinnerung: ein topologischer Raum ist ein *Hausdorff-Raum,* wenn je zwei verschiedene Punkte durch offene Mengen getrennt werden können. In einem Hausdorff-Raum sind Grenzwerte von Folgen eindeutig (falls sie existieren).

7.7. Proposition. *Es sei X ein Banachraum. Dann sind X mit der schwachen Topologie und X' mit der schwach*-Topologie Hausdorff-Räume.*
Insbesondere sind schwache und schwach-Grenzwerte eindeutig.*

Das nächste Resultat ist eine Folgerung aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit, das heißt, aus dem Satz 4.5 von Banach-Steinhaus.

7.8. Proposition. *Es sei X ein Banachraum, $(x_k)_k$ sei Folge in X, $(\alpha_k)_k$ sei Folge in X', und es gelte*

$$x_k \rightharpoonup x_\infty \qquad \text{und} \qquad \alpha_k \overset{*}{\rightharpoonup} \alpha_\infty .$$

(1) *Dann sind x_k und α_k beschränkt, und es gilt*

$$\|x_\infty\| \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n\| \qquad \text{und} \qquad \|\alpha_\infty\| \le \liminf_{n\to\infty} \|\alpha_n\| .$$

(2) *Wenn mindestens eine der beiden Folgen in der jeweiligen Norm konvergiert, dann gilt*

$$\alpha_k(x_k) \longrightarrow \alpha_\infty(x_\infty) .$$

Die folgenden Sätze und Bemerkungen sollen Unterschiede und Gemeinsamkeiten zwischen schwacher (beziehungsweise schwach*-) Topologie und starker Topologie aufzeigen.

7.9. Bemerkung. Für endlich-dimensionale Vektorräume V stimmt die schwache Topologie auf V mit der starken Topologie überein, und die schwach*-Topologie auf V' mit der starken Topologie auf V'.

7.10. Proposition. *Es sei X ein Banachraum und $M \subset X$ konvex. Dann ist M genau dann schwach abgeschlossen, wenn M stark abgeschlossen ist.*

7.11. Folgerung. *Es sei X ein unendlich-dimensionaler Banachraum.*

(1) *Dann ist der schwache Abschluss der Einheitssphäre* $S =_X \{ x \in X \mid \|x\| = 1 \}$ *der abgeschlossene Einheitsball* $\bar{B}_X = \{ x \in X \mid \|x\| \leq 1 \}$.
(2) *Das schwache Innere einer beschränkten Teilmenge von X ist leer.*
(3) *Das schwach*-Innere einer beschränkten Teilmenge von X' ist leer.*

Für lineare Abbildungen spielt es überraschenderweise keine Rolle, welche Topologien wir zugrunde legen. Das liegt an einer Folgerung aus dem Satz 4.11 vom abgeschlossenen Graphen. Dazu brauchen wir auch die Hausdorff-Eigenschaft aus Proposition 7.7.

7.12. Satz. *Es seien X und Y Banachräume. Dann ist eine lineare Abbildung $A\colon X \to Y$ genau dann schwach stetig, wenn sie beschränkt ist.*

Die folgenden Kompaktheitssätze sind einer der Hauptgründe für die Einführung der schwachen und der schwach*-Topologie. Die Beweise benötigen den Satz von Tychonoff, wonach das topologische Produkt beliebig vieler kompakter Räume wieder kompakt ist. Da sein Beweis sehr aufwändig wäre, geben wir die folgenden Resultate nur ohne Beweis an. Als Ersatz betrachten wir hinterher ähnlichen Sätze zur Folgenkompaktheit, die in der Praxis ebenfalls sehr wichtig sind, und deutlich leichter zu beweisen.

7.13. Satz (Banach-Alaoglu). *Es sei X ein Banachraum. Dann ist die abgeschlossene Einheitskugel*

$$\bar{B}_{X'} = \overline{B_1(0)} = \{ \alpha \in X' \mid \|\alpha\|_{\mathrm{op}} \leq 1 \} \subset X'$$

bezüglich der schwach-Topologie auf X' kompakt.*

7.14. Satz (Kakutani). *Es sei X ein Banachraum. Dann ist die abgeschlossene Einheitskugel $\bar{B}_X = \overline{B_1(0)} \subset X$ genau dann schwach kompakt, wenn X reflexiv ist.*

Für allgemeine Banachräume ist die schwache Topologie nicht metrisch (siehe aber Satz 7.19 zur schwachen Metrisierbarkeit des Einheitsballes). Das bedeutet, dass Kompaktheit und Folgenkompaktheit nicht äquivalent sind. Der folgende Satz ist insofern unabhängig vom Satz von Banach-Alaoglu, und in gewisser Weise die Umkehrung von Proposition 7.8 (1) für die schwach*-Topologie. In der Praxis, beispielsweise in der Variationsrechnung, betrachtet man gern beschränkte Folgen und fragt nach konvergenten Teilfolgen.

7.15. Satz. *Es sei X ein separabler Banachraum. Dann hat jede beschränkte Folge in X' eine schwach*-konvergente Teilfolge.*

Falls X reflexiv ist, können wir sogar auf Separabilität verzichten. Dazu brauchen wir eine Vorüberlegung.

7.16. Proposition. *Es sei X reflexiv und $W \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum. Dann ist auch W reflexiv.*

7.17. Satz (Eberlein-Smuljan). *Es sei X reflexiv. Dann besitzt jede beschränkte Folge eine schwach konvergente Teilfolge.*

7.18. Bemerkung. Reflexivität von X ist nötig. Als Beispiel betrachten wir den Raum ℓ^1 der absolut konvergenten Reihen. Aus den Übungen wissen wir, dass schwache und starke Folgenkonvergenz auf ℓ^1 äquivalent sind. Wäre $\bar{B}_{\ell^1}$ schwach folgenkompakt, dann wäre $\bar{B}_{\ell^1}$ auch stark folgenkompakt. Da aber ℓ^1 metrisierbar ist, wäre $\bar{B}_{\ell^1}$ dann auch kompakt nach Satz 2.3, und somit wäre ℓ^1 endlich-dimensional nach dem Satz 2.5 von Heine-Borel und Riesz.

Während die schwache und die schwach*-Topologie im Allgemeinen nicht metrisierbar sind, lassen sie sich unter einer geeigneten Separabilitätsbedingung zumindest auf dem Einheitsball metrisieren.

7.19. Satz (Schwache Metrisierbarkeit des Normballes). *Es sei X ein Banachraum.*

(1) *Wenn X' separabel ist, ist die schwache Topologie auf $\bar{B}_X$ metrisierbar.*
(2) *Wenn X separabel ist, ist die schwach*-Topologie auf $\bar{B}_{X'}$ metrisierbar.*

7.20. Bemerkung. Als Folgerung erhalten wir für separable Räume mit Satz 2.3 den Satz von Banach-Alaoglu und eine Richtung des Satzes von Kakutani.

7.21. Bemerkung. Die obigen Resultate, insbesondere die Sätze 7.13, 7.14 und 7.19 gelten völlig analog immer noch, wenn man den abgeschlossenen Einheitsball durch eine beliebige beschränkte und schwach beziehungsweise schwach*-abgeschlossene Teilmenge ersetzt.

Zum Schluss geben wir noch drei Möglichkeiten an, wie wir von schwacher oder schwach*-Konvergenz zu starker Konvergenz kommen, denn letztere ist für Anwendungen oft wichtiger.

7.22. Bemerkung. In seltenen Fällen sind schwache und starke Konvergenz äquivalent. Das gilt zum Beispiel auf endlich-dimensionalen Räumen, und auf dem Raum ℓ^1 der absolut konvergenten Reihen (Übung).

7.23. Definition. Eine Norm auf einem Vektorraum X heißt *gleichmäßig konvex,* wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle Vektoren x, $y \in X$ mit $\|x\| = \|y\| = 1$ gilt:

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| > 1 - \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \|y - x\| < \varepsilon \; .$$

Ein Banachraum mit einer gleichmäßig konvexen Norm heißt *gleichmäßig konvexer Banachraum.*

Wir sehen in Satz 8.3, dass $L^p(\Omega)$ für $1 < p < \infty$ gleichmäßig konvex ist. Auf der anderen Seite sind weder $L^1(\Omega)$ noch $L^\infty(\Omega)$ gleichmäßig konvex. Falls Ω aus genau zwei Punkten vom Maß 1 besteht, ist das besonders einfach zu sehen.

7.24. Satz. *Es sei X ein gleichmäßig konvexer Banachraum, und (x_k) konvergiere schwach in X gegen $x \in X$. Falls*

$$\limsup_{k\to\infty} \|x_k\| \leq \|x\| \; ,$$

konvergiert (x_k) sogar stark gegen x.

7.25. Bemerkung. Wir erinnern uns an kompakte Operatoren, siehe Definition 2.6. Für eine lineare Abbildung $A\colon X \to Y$ sind äquivalent:

(1) A ist kompakt.
(2) A bildet beschränkte Teilmengen von X auf relativ kompakte Teilmengen von Y ab.
(3) Für jede beschränkte Folge $(x_k)_k$ in X besitzt Ax_k eine in Y konvergente Teilfolge.

Wir erhalten eine weitere Möglichkeit, zu stark konvergenten Folgen überzugehen, und eine weitere nützliche Charakterisierung kompakter Operatoren.

7.26. Proposition. *Es seien X und Y Banachräume, und $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.*

(1) *Es sei A kompakt und $(x_k)_k$ konvergiere schwach gegen x in X. Dann konvergiert $(Ax_k)_k$ stark gegen Ax in Y.*
(2) *Es sei X reflexiv. Wenn für alle $x \in X$ und alle Folgen $(x_k)_k$ mit schwachem Grenzwert x in X die Bildfolge $(Ax_k)_k$ in Y stark gegen Ax konvergiert, ist A kompakt.*

7.27. Beispiel. Als Anwendung der obigen Methoden betrachten wir das schwache Eigenwert-Problem für den Laplace-Operator Δ auf einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, der Einfachheit halber mit glattem Rand. Nach Beispiel 0.2 aus der Einleitung heißt $f \in C_0^\infty(\Omega)$ *Eigenfunktion* des Laplace-Operators Δ auf $C_0^\infty(\Omega)$ zum *Eigenwert* λ, wenn

$$\Delta f + \lambda f = 0 \, .$$

Auf dem Raum $H_0^1(\Omega)$ betrachten wir die Bilinearform

$$B(f,g) = \sum_{i=1}^n \langle \partial_i f, \partial_i g \rangle_{L^2}$$

aus Beispiel 6.18. Nach dem Fundamentallemma der Variationsrechnung und der Greenschen Formel aus Beispiel 5.21 ist $f \in C_0^\infty(\Omega)$ genau dann eine Eigenfunktion von Δ zum Eigenwert λ, wenn

$$B(f,g) = \lambda \, \langle f, g \rangle_{L^2} \qquad \text{für alle } g \in C_0^\infty(\Omega) \, .$$

Diese Gleichung nennen wir die schwache Formulierung der Eigenfunktionsgleichung; sie ist bereits für $f \in H_0^1(\Omega)$ sinnvoll. Wenn sie gilt, nennen wir f eine *schwache Eigenfunktion* zum Eigenwert λ.

Man kann zeigen, dass alle schwachen Eigenfunktionen des Laplace-Operators glatt sind, und somit auch „starke" Eigenfunktionen.

7.28. Satz (Eigenwerte des Laplace-Operators unter Dirichlet-Randbedingungen). *Es seien Ω ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand und Δ der Laplace-Operator auf Ω. Dann gibt es eine unbeschränkte, monoton steigende Folge $(\lambda_k)_k$ in $(0,\infty)$ und eine Hilbertbasis $(f_k)_k$ von $L^2(\Omega)$, so dass f_k für alle k in $H_0^1(\Omega)$ liegt und eine schwache Eigenfunktion von Δ zum Eigenwert λ_k ist.*

Als einziges weiteres Hilfmittel benötigen wir den Satz 9.12 von Rellich, wonach die Einbettung $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ kompakt ist, wenn Ω beschränkt ist und „hinreichend schönen" Rand hat.

Mit Satz 7.28 allein können wir noch nicht viel über den Laplace-Operator aussagen. Aber sobald wir davon ausgehen, dass alle f_k Eigenfunktionen im ursprünglichen Sinn sind, haben wir Δ im Hilbertraum-Sinne „diagonalisiert."

7.29. Folgerung. *Es seien Ω ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand und Δ der Laplace-Operator auf Ω.*

(1) *Der Green-Operator $\Delta^{-1} \colon L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ ist stetig.*
(2) *Der Green-Operator $\Delta^{-1} \colon L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ mit Dirichlet-Randbedingungen ist kompakt.*

KAPITEL 8

Dualräume und Reflexivität

Wir haben in den letzten Kapiteln mehrere interessante Resultate für reflexive Räume kennengelernt, beispielsweise den Satz von Eberlein-Smuljan 7.17. Auf der anderen Seite wissen wir aus den Übungen, dass ℓ^1 und allgemeiner $L^1(\Omega)$ im Allgemeinen nicht reflexiv sind, und dass diese Räume oft etwas andere Eigenschaften als reflexive Räume haben. Interessant daran ist unter anderem, dass der Bidualraum, um den es bei Reflexivität ja immer geht, in der Formulierung der obigen Sätze und Eigenschaften oft gar nicht vorkommt. Hilberträume sind nach Folgerung 6.5 aus dem Rieszschen Darstellungssatz immer reflexiv. Wir erhalten (strikte) Inklusionen von Klassen

$$\text{normierte Vektorräume} \supset \text{Banachräume} \supset \text{reflexive Räume} \supset \text{Hilberträume}.$$

Völlig unabhängig davon ist eine andere hilfreiche Eigenschaft, die wir häufig benutzt haben, nämlich Separabilität. In diesem Kapitel geben wir für einige wichtige Banachräume ihre Dualräume an und schließen daraus Reflexivität, wenn möglich.

Nach Definition 1.19 ist ein normierter Vektorraum X reflexiv, wenn die natürliche Einbettung $\iota\colon X \to X''$ eine Isometrie ist. Da Dualräume stets vollständig sind, ist X somit ein Banachraum. Aus Folgerung 3.8 aus dem Satz von Hahn-Banach ergibt sich, dass ι stets eine isometrische Einbettung ist. Bei Reflexivität geht es also vor allem um die Surjektivität von ι.

Aus Proposition 7.16 wissen wir bereits, dass abgeschlossene Unterräume reflexiver Räume wieder reflexiv sind. Klar ist außerdem, dass ein Banachraum, der zu einem reflexiven Raum isomorph ist, auch reflexiv sein muss.

8.1. Proposition. *Es sei X ein Banachraum.*

(1) *Dann ist $X \cong \operatorname{im}\iota \subset X''$ stark abgeschlossen.*
(2) *Und X ist genau dann reflexiv, wenn X' reflexiv ist.*

8.2. Beispiel. Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum mit unendlicher σ-Algebra $\mathcal{A}$, zum Beispiel $\mathbb{N}$ mit dem Zählmaß (und $L^p(\mathbb{N}) = \ell^p$) oder ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit dem Lebesgue-Maß. Wir kennen bereits die Dualräume $\ell^\infty \cong \ell^{1\prime}$ und $L^1(\Omega)' \cong L^\infty(\Omega)$ aus den Übungen. Außerdem wissen wir, dass ℓ^1 und $L^1(\Omega)$ nicht reflexiv sind. Es folgt, dass ℓ^∞ und $L^\infty(\Omega)$ ebenfalls nicht reflexiv sind, und das entsprechende gilt dann auch für deren Dualräume, Bidualräume, und so weiter. Tatsächlich erhalten wir Folgen von strikten, abgeschlossenen, isometrischen Inklusionen

$$L^1(\Omega) \subsetneqq L^1(\Omega)'' \subsetneqq \cdots \qquad \text{und} \qquad L^\infty(\Omega) \subsetneqq L^\infty(\Omega)'' \subsetneqq \cdots$$

Im Beweis von Satz 8.4 benötigen wir gleichmäßige Konvexität, siehe Definition 7.23.

8.3. Satz. *Es sei $1 < p < \infty$ und Ω ein Maßraum. Dann ist $L^p(\Omega)$ gleichmäßig konvex.*

8.4. Satz. *Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $1 < p < \infty$. Für $1 < q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gibt es eine lineare Isometrie*

$$\Phi\colon L^q(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega)' \qquad \textit{mit} \qquad (\Phi g)(f) = \int_\Omega g f \, d\mu \, .$$

Insbesondere ist $L^p(\Omega)$ reflexiv.

Der Spezialfall $p = 2$ ist analog zu den Folgerung 6.5 und 6.7 aus dem Rieszschen Darstellungssatz (wir bemerken aber, dass der obige Ausdruck im Falle $\Bbbk = \mathbb{C}$ kein Skalarprodukt, sondern eine bilineare Abbildung ist). Der Fall $p = 1$ und $q = \infty$ gilt für σ-endliche Maßräume (allerdings mit einem anderen Beweis), $p = \infty$ und $q = 1$ im Allgemeinen jedoch nicht, siehe Übungen.

8.5. FOLGERUNG. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, dann sind die Sobolevräume $W^{k,p}(\Omega)$ und $W_0^{k,p}(\Omega)$ für $1 < p < \infty$ ebenfalls reflexiv.*

Das folgende Resultat geben wir zur Ergänzung ohne Beweis an.

8.6. SATZ (Milman-Pettis). *Gleichmäßig konvexe Banachräume sind reflexiv.*

Wir können auch den Dualraum von $L^\infty(\Omega)$ beschreiben. Wir betrachten der Einfachheit nur den Fall $\Bbbk = \mathbb{R}$. Im Fall $\Bbbk = \mathbb{C}$ können wir alle Elemente von $L^\infty(\Omega)$ und seinem Dualraum in Real- und Imaginärteilzerlegen, und erhalten dann analoge Resultate.

8.7. DEFINITION. Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

(1) Eine (*endlich*) *additive Mengenfunktion* ist eine Abbildung $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, so dass
$$\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B) \qquad \text{für alle } A,\, B \in \mathcal{A} \text{ mit } A \cap B = \emptyset\ .$$
(2) Eine additive Mengenfunktion φ heißt *absolutstetig* (*bezüglich* μ), wenn $\varphi(N) = 0$ für alle μ-Nullmengen $N \in \mathcal{A}$ gilt.

(3) Die *Variation* einer additiven Mengenfunktion φ ist die Mengenfunktion $|\varphi| : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$ mit
$$|\varphi|(E) = \sup\bigl\{\varphi(A) - \varphi(B) \bigm| A, B \in \mathcal{A} \text{ und } A, B \subset E\bigr\}\ .$$
Wenn $|\varphi|$ auf $\mathcal{P}(\Omega)$ beschränkt ist, heißt φ eine additive Mengenfunktion *von beschränkter Variation,* und wir definieren die *Totalvariation* $|\varphi|(\Omega)$.

Es sei $\sum_{i=1}^n a_i\, \chi_{A_i}$ eine Treppenfunktion mit $a_1 \in \mathbb{R}$ und $A_i \in \mathcal{A}$ für $i = 1, \dots, n$ und φ eine absolutstetige, additive Mengenfunktion von beschränkter Variation, dann definieren wir das Integral
$$\int_\Omega \sum_{i=1}^n a_i\, \chi_{A_i}\, d\varphi = \sum_{i=1}^n a_i\, \varphi(A_i)\ .$$
Da φ absolutstetig ist, hängt das Integral nur vom Bild der Treppenfunktion in $L^\infty(\Omega)$ ab.

Treppenfunktionen der obigen Form bilden einen dichten Unterraum in $L^\infty(\Omega)$, und es gilt
$$\left|\int_\Omega \sum_{i=1}^n a_i\, \chi_{A_i}\, d\varphi\right| \le \left\|\sum_{i=1}^n a_i\, \chi_{A_i}\right\|_\infty |\varphi|(\Omega)\ .$$
Also hat das obige Integral von Treppenfunktionen eine eindeutige stetige lineare Fortsetzung auf $L^\infty(\Omega)$, und wir erhalten ein Element in $L^\infty(\Omega)'$.

8.8. BEISPIEL. Sei $g \in L^1(\Omega)$, dann erhalten wir eine absolutstetige, additive Mengenfunktion
$$\varphi(A) = \int_A g\, d\mu$$
von beschränkter Variation
$$|\varphi|(A) = \int_A |g|\ d\mu \le \int_\Omega |g|\ d\mu = \|g\|_{L^1}$$
und Totalvariation $|\varphi|(\Omega) = \|g\|_{L^1}$. Das Integral von $f \in L^\infty(\Omega)$ ist gerade
$$\int_\Omega f\, d\varphi = \int_\Omega f g\, d\mu\ .$$

Falls μ ein σ-endliches Maß ist, gilt $L^\infty(\Omega) = L^1(\Omega)'$, und es folgt

$$\int_\Omega \cdot\, g\, d\mu = \iota g \in L^1(\Omega)'' \;.$$

8.9. Satz. *Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Dann entsprechen die Elemente $\alpha \in L^\infty(\Omega)'$ genau den absolutstetigen, additiven Mengenfunktionen φ von beschränkter Variation, so dass*

$$\alpha(f) = \int_\Omega f\, d\varphi \qquad \textit{für alle } f \in L^\infty(\Omega) \;.$$

und es gilt $\|\alpha\|_{\mathrm{op}} = |\varphi|(\Omega)$.

Zum Schluss geben wir ohne Beweis die deutlich schwierigere Konstruktion von $C^0(X)'$ für kompakte metrische Räume X an. Sie lässt sich mit etwas zusätzlicher Arbeit auch auf lokalkompakte metrische Räume (wie zum Beispiel $\mathbb{R}^n$) ausdehnen, das heißt, auf Räume, in denen kleine abgeschlossene metrische Bälle kompakt sind. Die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}$ von X ist die kleinste σ-Algebra, die alle offenen Mengen von X enthält. Ihre Elemente heißen Borelmengen.

Sei $\varphi \in C^0(X)'$. Dann konstruiert man zunächst ein äußeres Variationsmaß $|\varphi|$ durch

$$\begin{aligned} |\varphi|(U) &= \sup\bigl\{\, \varphi(f) \bigm| f \in C^0(X) \text{ mit } \operatorname{supp}(f) \subset U \text{ und } \|f\|_{\sup} \le 1 \,\bigr\} && \text{für } U \subset X \text{ offen, und} \\ |\varphi|(V) &= \inf\bigl\{\, |\varphi|(U) \bigm| V \subset U,\, U \subset X \text{ offen} \,\bigr\} && \text{für } V \subset X \text{ beliebig.} \end{aligned}$$

Man kann zeigen:

(1) *Borelregularität.* Alle Borelmengen von X sind $|\varphi|$-messbar, und für beliebige Teilmengen $V \subset X$ existiert eine Borelmenge $A \supset V$ mit $\mu(A) = \mu(V)$.
(2) *Innere Regularität.* Für alle Borelmengen $A \subset X$ gilt

$$|\varphi|(A) = \sup\bigl\{\, \mu(K) \bigm| K \subset A, K \text{ kompakt} \,\bigr\} \;.$$

Maße mit diesen Eigenschaften nennt man *Radon-Maße;* ist X nur lokalkompakt, so verlangt man zusätzlich, dass $\mu(K) < \infty$ für alle kompakten Teilmengen $K \subset X$.

Anschließend zeigt man, dass $C^0(X)$ dicht in $L^1(X, |\varphi|)$ liegt, also hat φ eine eindeutige Fortsetzung in $L^1(X, |\varphi|)'$. Wenn X kompakt ist, ist $C^0(X)$ und damit auch $L^1(X, |\varphi|)$ separabel, und es folgt $L^1(X, |\varphi|)' \cong L^\infty(X, |\varphi|)$. Wir können φ also durch ein Element in $L^\infty(X, |\varphi|)$ beschreiben.

8.10. Satz (Riesz-Radon). *Es sei X ein kompakter metrischer Raum. Dann existiert zu jedem $\varphi \in C^0(X)'$ ein eindeutiges Radon-Maß μ auf X und eine Funktion $g \in L^\infty(X, \mu)$ mit $|g(x)| = 1$ für μ-fast alle $x \in X$, so dass*

$$\varphi(f) = \int_X fg\, d\mu \qquad \textit{für alle } f \in C^0(X) \;.$$

8.11. Bemerkung. Auf den ersten Blick ähneln sich die obigen Beschreibungen der Dualräume von $C^0(X)$ und $L^\infty(\Omega)$. Allerdings sind die Maße im Satz von Riesz-Radon σ-additiv, während die Mengenfunktionen in Satz 8.9 nur endlich additiv sein müssen. Auf der anderen Seite sind letztere aber absolutstetig zum vorgebenen Maß auf Ω, während die Maße im Satz von Riesz-Radon keine solche Bedingung erfüllen müssen.

Wenn beispielsweise $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet ist, dann ist der Abschluss $\overline{\Omega}$ kompakt, und $C^0(\overline{\Omega}) \subset L^\infty(\Omega)$ ist ein abgeschlossener Unterraum. Wir erhalten eine Einschränkungsabbildung $L^\infty(\Omega)' \to C^0(\overline{\Omega})'$, die nach dem Satz von Hahn-Banach surjektiv ist. Folglich lässt sich jedes Radonmaß auf $\overline{\Omega}$ zu einer absolutstetigen, additiven Mengenfunktion von beschränkter Variation auf Ω fortsetzen. Man beachte allerdings, dass $L^\infty(\Omega)$ nicht separabel ist, und der Satz von Hahn-Banach folglich keine Hinweise zur Konstruktion dieser Fortsetzung gibt.

Als Beispiel betrachte für $x \in \overline{\Omega}$ die Abbildung

$$\varphi_x \in C^0(\overline{\Omega})' \qquad \text{mit} \qquad \varphi_x(f) = f(x) \ .$$

Da L^∞-Funktionen nur fast überall definiert sind, finden wir keine offensichtliche Fortsetzung von φ_x auf $L^\infty(\Omega)$. Das zu φ_x gehörige Radon-Maß ist das Dirac-Maß δ_x mit

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

für alle $A \subset X$. Falls x auf dem Rand von Ω liegt, induziert es das Nullmaß auf Ω. Andernfalls ist es nicht absolutstetig bezüglich des Lebesgue-Maßes λ, denn $\lambda\{x\} = 0$. Also finden wir auch keine offensichtliche Fortsetzung von δ_x einer absolutstetigen, additiven Mengenfunktion von beschränkter Variation auf Ω.

KAPITEL 9

Sobolev-Räume

Wir haben Sobolev-Räume bereits in Kapitel 5 gesehen. Schwache Lösung von Differentialgleichungen, Eigenwertproblemen und anderen Problemen der Analysis sind oftmals Elemente von Sobolev-Räumen, siehe etwa Beispiel 6.18 oder Satz 7.28.

In diesem Kapitel wollen wir einige grundlegende Techniken für den Umgang mit Sobolev-Funktionen kennenlernen. Den Approximationssatz von Meyers-Serrin haben wir bereits beim Beweis der Poincaré-Ungleichung 6.17 benutzt, und den Kompaktheitssatz von Rellich bei der Bestimmung der schwachen Eigenfunktionen des Laplace-Operators in Satz 7.28.

9.1. Bemerkung. Für geeignete Funktionen f, $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definieren wir die *Faltung* $f * g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, d\lambda(y) \;,$$

falls das Integral für (λ-fast) alle x existiert. Meistens wird eine der beiden Funktionen eine C^∞-Funktion mit kompaktem Träger und die andere eine L^p-Funktion sein. In diesem Fall existiert $f * g$ stets.

(1) *Assoziativität und Kommutativität.* Wenn zwei der drei Funktionen f, g, h glatt sind und kompakten Träger haben, folgt aus der Integraltransformationsformel und dem Satz von Fubini, dass

$$f * g = g * f \qquad \text{und} \qquad f * (g * h) = (f * g) * h \;.$$

Ein neutrales Element (oder gar Inverse) für die Faltung gibt es (in den obigen Funktionenräumen) jedoch nicht.

(2) *Träger.* Für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $A \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen bedeute $\operatorname{supp} f \subset A$ hier $f|_{\mathbb{R}^n \setminus A} = 0$.

$$\operatorname{supp} f \subset \overline{B_r(0)} \quad \text{und} \quad \operatorname{supp} g \subset \overline{B_s(0)} \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{supp} f * g \subset \overline{B_{r+s}(0)} \;.$$

(3) *Glättung.* Es sei $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $1 \le p \le \infty$. Dann folgt $\varphi * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, und für die partiellen Ableitungen zu Multiindizes $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ gilt

$$D^\gamma(\varphi * f) = (D^\gamma \varphi) * f \;.$$

(4) *Verträglichkeit mit Ableitungen.* Falls f schwache Ableitungen der Ordnung $|\gamma|$ besitzt, gilt auch

$$D^\gamma(\varphi * f) = \varphi * D^\gamma f \;,$$

das heißt, Faltung mit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ macht aus schwachen Ableitungen von f starke Ableitungen von $\varphi * f$.

(5) *Konvergenz.* Es sei wieder $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $1 \le p \le \infty$. Es seien $f_k \in L^p(\mathbb{R}^n)$ für $k \in \mathbb{N}$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Falls $f_k \rightharpoonup f$ (für $1 \le p < \infty$) oder $f_k \overset{*}{\rightharpoonup} f$ (für $1 < p \le \infty$) gilt, konvergiert $\varphi_\varepsilon * f_k \to \varphi_\varepsilon f$ punktweise.

Weitere hilfreiche Eigenschaften der Faltung lernen wir in den folgenden Beweisen kennen.

Wir benötigen eine Abschätzung für Faltungsintegrale. Es bezeichne $F(\,\cdot\, + h, \,\cdot\,)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Funktion $x \mapsto F(x+h, x)$.

9.2. Proposition. *Es sei* $F\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *eine Lebesgue-messbare Funktion,* $1 \le p \le \infty$ *und* $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$. *Falls*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{h \in \operatorname{supp}\varphi} \|F(\,\cdot\,+h,\,\cdot\,)\|_p < \infty$$

gilt, existiert eine Funktion $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *mit*

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y)\,F(x,y)\,d\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(h)\,F(x,x-h)\,d\lambda(h)\ ,$$

und es gilt

$$\|g\|_p \le \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(h)|\ \|F(\,\cdot\,+h,\,\cdot\,)\|_p\ d\lambda(h) \le \|\varphi\|_1 \operatorname*{ess\,sup}_{h \in \operatorname{supp}\varphi} \|F(\,\cdot\,+h,\,\cdot\,)\|_p\ .$$

9.3. Folgerung (Faltungsabschätzung). *Es sei* $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *und* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, *dann gilt*

$$\|\varphi * f\|_p \le \|\varphi\|_1\ \|f\|_p\ .$$

Insbesondere bildet $\bigl(L^1(\mathbb{R}^n), +, *\bigr)$ *eine Banachalgebra.*

Der folgende Satz ist eine Folgerung aus dem Approximationssatz 1.30.

9.4. Satz. *Es sei* $1 \le p < \infty$ *und* $f \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$. *Dann gilt*

$$\lim_{h \in \mathbb{R}^n,\ |h| \to 0} \|f(\,\cdot\,+h) - f\|_{k,p} = 0\ .$$

In $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt das jedoch nicht. Als Gegenbeispiel dient (wieder einmal) die charakteristische Funktion einer messbaren echten Teilmenge $\emptyset \ne A \subsetneqq \mathbb{R}^n$.

Im Folgenden werden wir häufig mit einer *Standard-Dirac-Familie* $(\varphi_\varepsilon)_\varepsilon$ falten. Gemeint ist eine Familie von C^∞-Funktionen φ_ε für $\varepsilon > 0$ mit

$$\varphi_\varepsilon \ge 0\ , \qquad \operatorname{supp}\varphi_\varepsilon = \overline{B_\varepsilon(0)}\ , \qquad \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon\,d\lambda = 1 \qquad \text{und} \qquad \varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\,\varphi\Bigl(\frac{x}{\varepsilon}\Bigr)\ .$$

Die Bilder der φ_ε in $C^0(\mathbb{R}^n)'$ konvergieren für $\varepsilon \to 0$ schwach* gegen das Dirac-Maß bei 0.

9.5. Folgerung. *Es sei* $1 \le p < \infty$, $f \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ *und* $(\varphi_\varepsilon)_\varepsilon$ *eine Standard-Dirac-Familie. Dann gilt*

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \varphi_\varepsilon * f = f \qquad \in L = W^{k,p}(\mathbb{R}^n)\ .$$

Für die Beweise der folgenden Sätze müssen wir Sobolev-Funktionen als Summen von Sobolev-Funktionen mit Trägern in vorgegebenen offenen Mengen betrachten können. Mit $C_c^\infty(\overline{\Omega})$ bezeichnen wir den Raum aller Funktionen, deren Träger in $\overline{\Omega}$ kompakt ist. Insbesondere müssen diese Funktionen am Rand nicht verschwinden (im Gegensatz zum Raum $C_c^\infty(\Omega)$).

9.6. Proposition (Partitionen der Eins). *Es sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ein Gebiet und* $\mathcal{U}$ *eine offene Überdeckung von* $\overline{\Omega}$. *Dann existiert eine der Überdeckung* $\mathcal{U}$ *untergeordnete Partition der Eins* $(\eta_i)_{i \in I}$ *in* $C_c^\infty(\overline{\Omega})$, *genauer,*

(1) *die Indexmenge ist* $I = \{1, \dots, N\} \subset \mathbb{N}$ *oder* $I = \mathbb{N}$,
(2) *für alle* $i \in I$ *hat* η_i *kompakten Träger, es gilt* $\eta_i \ge 0$, *und es existiert* $U \in \mathcal{U}$ *mit*

$$\operatorname{supp}\eta_i \subset U\ ,$$

(3) *für alle* $x \in \overline{\Omega}$ *existiert eine Umgebung* V *von* x, *so dass* $\eta_i|_V = 0$ *für fast alle* $i \in I$, *und*
(4) *es gilt*

$$\sum_{i \in I} \eta_i = 1 \qquad \textit{auf ganz } \overline{\Omega}\ .$$

Wir können eine Partition der Eins $(\eta_i)_i$ benutzen, um eine Sobolev-Funktion f in Summanden $\eta_i f$ mit $f = \sum_i \eta_i f$ zu zerlegen. Die Summanden sind wieder Sobolev-Funktionen, denn für das Produkt einer glatten Funktion mit einer Sobolev-Funktion gilt die Kettenregel

$$\partial_i(\eta f) = (\partial_i \eta) \cdot f + \eta\, \partial_i f\ .$$

Wir geben den folgenden Satz ohne Beweis an.

9.7. Satz (Meyers-Serrin). *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $1 \leq p < \infty$. Dann liegt $W^{k,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ dicht in $W^{k,p}(\Omega)$.*

Man beachte, dass Ω offen sein muss. Über das Verhalten der approximierenden Funktionen am Rand von Ω können wir hier keine Aussagen machen(im Gegensatz zu Satz 1.30, wo Funktionen mit kompaktem Träger im Inneren von Ω ausreichen). Wenn wir stattdessen annehmen, dass der Rand von Ω nicht allzu wild ist, bekommen wir ein wesentlich stärkeres Approximationsresultat.

9.8. Definition. Eine Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ erfüllt die *Segmentbedingung,* wenn es zu jedem Punkt $x \in \partial\Omega$ eine Umgebung U von x in $\mathbb{R}^n$ und einen Vektor $y \neq 0$ gibt, so dass $z + ty \in \Omega$ für alle $z \in \overline{\Omega} \cap U$ und alle $t \in (0, 1)$.

Anschaulich bedeutet das, dass Ω nahe bei x nur auf der durch y beschriebenen Seite seines Randes liegt. Mit $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ bezeichnen wir die Vervollständigung des Raumes $C_c^\infty(\overline{\Omega})$.

9.9. Satz. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, das die Segmentbedingung erfüllt, und $1 \leq p < \infty$. Dann liegt $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ dicht in $W^{k,p}(\Omega)$.*

Als einfache Anwendung überlegen wir uns, dass die Sobolev-Eigenschaft invariant unter Diffeomorphismen ist.

9.10. Folgerung. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, das die Segmentbedingung erfüllt, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\overline{\Omega} \subset U$ und $\Phi\colon U \to V \subset \mathbb{R}^n$ ein C^k-Diffeomorphismus. Dann induziert Φ eine invertierbare Abbildung*

$$\Phi^*\colon W^{k,p}\big(\Phi(\Omega)\big) \longrightarrow W^{k,p}(\Omega) \qquad \textit{mit} \qquad f \mapsto f \circ \Phi\ .$$

Als nächstes wollen wir zeigen, dass die Einbettung $W^{k,p}(\Omega) \to W^{k-1,p}(\Omega)$ kompakt ist. Auch hierzu brauchen wir Gebiete mit einer gewissen Regularität.

9.11. Definition. Ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ hat *Lipschitz-Rand,* wenn es zu jedem Punkt $x \in \partial\Omega$ eine Umgebung U von $x \in \mathbb{R}^n$, eine Hyperebene $H \subset \mathbb{R}^n$, einen Vektor $v \perp H$ mit $|y| = 1$ und eine Lipschitz-Funktion $h \in C^{0,1}(H)$ gibt, so dass

$$U \cap \Omega = U \cap \big\{\, y + tv \,\big|\, y \in H \text{ und } t < h(y) \,\big\}\ .$$

Wenn Ω Lipschitz-Rand hat, erfüllt Ω automatisch die Segmentbedingung. Der folgende Satz ist nur ein Spezialfall des Satzes von Rellich, allerdings ein sehr wichtiger.

9.12. Satz (Rellich). *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand, $k \geq 1$, $C > 0$ und $1 \leq p < \infty$. Gegeben sei eine Folge $(f_j)_j$ und f in $W^{k,p}(\Omega)$. Dann gilt*

$$\|f_j\|_{k,p} < C \textit{ für alle } j \textit{ und } f_j \rightharpoonup f \textit{ in } W^{k-1,p}(\Omega) \qquad \Longrightarrow \qquad f_j \to f \textit{ in } W^{k-1,p}(\Omega)\ .$$

9.13. Folgerung. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand, $1 < p < \infty$ und $k \geq 1$. Dann ist die Inklusionsabbildung $W^{k,p}(\Omega) \to W^{k-1,p}(\Omega)$ kompakt.*

Wie schon gesagt, haben wir diese Folgerung im Beweis von Satz 7.28 bereits für $H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ benutzt.

Bisher haben wir über Sobolev Räume $W^{k,p}(\Omega)$ mit $p = \infty$ nicht viel aussagen können. Tatsächlich kennen wir diese Räume außer für $k = 0$ (zumindest in speziellen Situationen) schon unter einem anderen Namen.

9.14. Satz. *Es sei Ω ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand und $k \geq 1$. Dann gilt*

$$W^{k,\infty}(\Omega) \cong C^{k-1,1}(\Omega) .$$

9.15. Bemerkung. Da die Überlegungen im Beweis des obigen Satzes rein lokal sind, könnten wir die Räume $W^{k,\infty}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und $C^{k-1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ beziehungsweise $W^{k,\infty}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ und $C^{k-1,1}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ einführen. Funktionen in diesen Räumen müssen für jeden Punkt x in Ω beziehungsweise $\overline{\Omega}$ die jeweilige Bedingung in einer Umgebung U von x erfüllen. Diese Räume tragen nach wie vor eine Topologie, aber keine offensichtliche Norm, da sie Elemente enthalten, deren „globale“ Norm den Wert ∞ hätte. Es gilt dafür aber auf beliebigen Gebieten

$$W^{k,\infty}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \cong C^{k-1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega) ,$$

und auf unbeschränkten Gebieten mit Lipschitz-Rand

$$W^{k,\infty}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) \cong C^{k-1,1}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) .$$

Wir können den obigen Satz benutzen, um auf Lipschitz-Rändern ein Maß zu definieren. Es entspricht dem Lebesgue-Maß auf Untermannigfaltigkeiten aus Analysis III. Außerdem können wir den Satz von Gauß auf Gebiete mit Lipschitz-Rand ausdehnen. Dazu brauchen wir noch ein Einheitsnormalenfeld und einen Einschränkungsoperator von Sobolev-Funktionen auf den Rand.

Mit den Bezeichnungen von Definition 9.11 definieren wir auf $U \cap \partial\Omega = U \cap \mathrm{Gr}(h\colon H \to \mathbb{R}) \subset H \oplus \mathbb{R}v \cong \mathbb{R}^n$ ein Oberflächenmaß σ. Dazu identifieren wir Teilmengen $A \subset U \cap \partial\Omega$ des Randes mit ihren Orthogonalprojektionen $p(A) \subset H$ und parametrisieren sie durch

$$F\colon p(A) \longrightarrow A \qquad \text{mit} \qquad F(y) = y + h(y)v \in H \oplus \mathbb{R}v = \mathbb{R}^n .$$

Die (schwache) Gramsche Determinante von F ist fast überall gegeben durch $\sqrt{1 + |Dh|^2}$, wobei $Dh\colon A \to H$ den schwachen Gradienten von h beschreibt. Da H isometrisch zu $\mathbb{R}^{n-1}$ ist, trägt H ein $(n-1)$-dimensionales Lebesgue-Maß μ, und wir definieren

$$\sigma(A) = \int_{p(A)} \sqrt{1 + |Dh|^2}\, d\mu$$

für alle $A \subset U \cap \partial\Omega$, für die $p(A) \subset H$ Lebesgue-messbar ist. Nach der Integraltransformationsformel erhalten wir für Funktionen $f\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{supp} f \subset U \cap \partial\Omega$ demnach

$$\int_A f\, d\sigma = \int_{p(A)} (f \circ F) \cdot \sqrt{1 + |Dh|^2}\, d\mu .$$

Für den Satz von Gauß benötigen wir das schwache Einheitsnormalenfeld $\nu\colon A \to \mathbb{R}^n$, gegeben durch

$$\nu \circ F = \frac{1}{\sqrt{1 + |Dh|^2}} \big(v - Dh\big)$$

Sowohl σ als auch ν sind unabhängig von der gewählten lokalen Darstellung von $\partial\Omega$ als Graph einer Lipschitz-Funktion, was für Lipschitz-Ränder allerdings schwer zu beweisen ist. Im Satz von Gauß integrieren wir gegen ein „normales Oberflächenmaß“ $\nu\, d\sigma$, das heißt, für ein Vektorfeld X betrachten wir

$$\int_A \langle X, \nu \rangle\, d\sigma = \int_{p(A)} \langle X \circ F, v - Dh \rangle\, d\mu$$

Dabei ist $Dh \in L^\infty(p(A); \mathbb{R}^{n-1})$, so dass das Integral für $X \in L^1(p(A); \mathbb{R}^n)$ sinnvoll ist. Aus dem Beweis unten ergibt sich, dass die rechte Seite unabhängig von der gewählten Darstellung ist.

Wir erinnern uns an die Divergenz eines Vektorfeldes $X\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, gegeben durch

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n \partial_i X_i \,.$$

Für $X \in W^{1,p}(\Omega)$ erhalten wir $\operatorname{div} X \in L^p(\Omega)$.

9.16. Satz (Gauß). *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit Lipschitz-Rand und normalem Oberflächenmaß $\nu\, d\sigma$ auf $\partial\Omega$. Sei $X \in W^{1,1}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ ein Vektorfeld. Dann gilt*

$$\int_\Omega \operatorname{div} X \, d\lambda = \int_{\partial\Omega} \langle X, \nu\rangle \, d\sigma \,.$$

Für den Beweis benötigen wir zwei Hilfsresultate. Das erste ist eine „schwache Kettenregel“.

9.17. Proposition. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen und $h \in C^{0,1}(U)$, und es sei $\Phi\colon U \times \mathbb{R} \to U \times \mathbb{R}$ gegeben durch*

$$\Phi(x) = \bigl(x', x_n + h(x')\bigr) \qquad \textit{mit} \qquad x = (x', x_n) \ \textit{und}\ x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \,.$$

Für $1 \le p < \infty$ und $f \in W^{1,p}(U \times \mathbb{R})$ ist $f \circ \Phi \in W^{1,p}(U \times \mathbb{R})$ mit

$$\partial_i (f \circ \Phi) = \begin{cases} \partial_i f \circ \Phi + \partial_n f \circ \Phi \cdot \partial_i h & \textit{für } i = 1, \dots, n-1, \textit{ und} \\ \partial_n f \circ \Phi & \textit{für } i = n. \end{cases}$$

Das zweite ist der sogenannte „Spursatz“. Das Wort „Spur“ hat dabei nicht die aus der linearen Algebra bekannte Bedeutung (solche Spuren gibt es in der Funktionalanalysis aber auch). Stattdessen ist die Spur gemeint, die eine Funktion auf dem Rand ihres Definitionsbereichs hinterlässt.

9.18. Satz (Spursatz). *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1} \times (-\infty, 0]$ offen, $k \ge 1$ und $1 \le p \le \infty$. Dann gibt es genau eine stetige Abbildung*

$$S\colon W^{k,p}(\Omega) \to W^{k-1,p}(\Omega \cap \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) \,,$$

so dass $Sf = f|_{\Omega \cap \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}}$ für alle $f \in C^k_c(\overline{\Omega})$.

Beachte, dass eine offene Teilmenge von $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1} \times (-\infty, 0]$ nichtleeren Durchschnitt mit $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ haben kann. Funktionen $f \in C^k_c(\overline{\Omega})$ müssen auf $\Omega \cap \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ daher auch nicht verschwinden. In den Übungen sehen wir Beispiele von Funktionen, die sich beim Einschränken auf den Rand „verschlechtern.“

9.19. Bemerkung. Man kann Sobolev-Räume $W^{k,p}(\Omega)$ auch für reelle Zahlen k definieren. Dann erhält man sogar eine stetige Abbildung

$$S\colon W^{k,p}(\Omega) \to W^{k-\frac{1}{p},p}(\Omega \cap \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) \,.$$

Das passt dazu, dass Funktionen in $W^{k,\infty}(\Omega) = C^{k-1,1}(\Omega)$ beim Einschränken überhaupt keine Regularität verlieren.

9.20. Folgerung. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit Lipschitz-Rand und $1 \le p < \infty$ Dann gibt es genau eine stetige Abbildung $S\colon W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$, so dass $Sf = f|_{\partial\Omega}$ für alle $f \in C^1_c(\overline{\Omega})$.*

9.21. Bemerkung. Allgemeiner können wir Spuroperatoren $S\colon W^{k,p}(\Omega) \to W^{k-1,p}(\partial\Omega)$ betrachten. Dazu müssen wir aber von Ableitungen entlang $\partial\Omega$ sprechen können. Das geht, wenn wir Gebiete mit $C^{k-1,1}$-Rand betrachten. Dazu müssen wir in Definition 9.11 zusätzlich verlangen, dass die Funktion h, deren Graph über H den Rand beschreibt, vom Typ $C^{k-1,1}$ ist.

KAPITEL 10

Fredholm-Operatoren

In diesem Abschnitt ergänzen wir zunächst einen wichtigen Satz über kompakte Operatoren. Anschließend betrachten wir Fredhom-Operatoren. Das sind Operatoren, die bis auf kompakte Operatoren invertierbar sind. Fredholm-Operatoren sind recht „robust“, das heißt, eine kleine „Störung“ eines Fredholm-Operators ist immer noch Fredholm. In der Praxis tauchen Fredholm-Operatoren daher oft dort auf, wo ein invertierbarer Differential-Operator durch Terme niederer Ordnung verändert wird.

Fredholm-Operatoren haben immer endlich-dimensionalen Kern und Kokern. Während sich die Dimension von Kern und Kokern bei einer kleinen Störung ändern kann, ist die Differenz der Dimensionen lokal konstant. Sie heißt der Index des Fredholm-Operators. Dieser Index hat in manchen geometrischen Situationen eine rein topologische Interpretation, was Fredholm-Operatoren für die Differentialtopologie interessant macht.

Es sei also $\mathcal{K}(X, Y)$ der Raum der kompakten Operatoren von einem Banachraum X in einen Banachraum Y.

10.1. Beispiel. Wir erinnern uns an einige Beispiele kompakter Operatoren.

(1) Für beschränkte konvexe Gebiete Ω sind die Inklusionsabbildungen $C^{k,\alpha}(\Omega) \to C^{\ell,\beta}(\Omega)$ nach Satz 2.20 kompakt, wenn $k + \alpha > \ell + \beta$. Anstelle Konvexität würde reichen, dass Ω Lipschitz-Rand hat; das wurde allerdings nicht gezeigt.
(2) Nach dem Satz 9.12 von Rellich sind für beschränkte Gebiete Ω mit Lipschitz-Rand die Abbildungen $W^{k,p}(\Omega) \to W^{\ell,p}(\Omega)$ kompakt, wenn $k > \ell$.
(3) Nach Folgerung 7.29 ist der Green-Operator Δ^{-1} zum Laplace-Operator Δ auf einem beschränkten Gebiet Ω mit glattem Rand kompakt (auch hier würde Lipschitz-Rand ausreichen).

10.2. Bemerkung. Operatoren von endlichem Rang sind kompakt, da das Bild des Einheitsballes kompakt ist. In den Übungen sehen wir, dass der Raum $\mathcal{K}(X, Y) \subset \mathcal{L}(X, Y)$ bezüglich der Operatornorm abgeschlossen ist. Folglich enthält $\mathcal{K}(X, Y)$ den Abschluss des Unterraumes der Operatoren von endlichem Rang. Falls Y ein Hilbertraum ist, kann man zeigen, dass dieser Abschluss bereits ganz $\mathcal{K}(X, Y)$ ausmacht. Im Allgemeinen gilt das jedoch nicht; Gegenbeispiele sind aber aufwändig zu konstruieren.

Für den folgenden wichtigen Satz benötigen wir den Satz 2.12 von Arzelá-Ascoli.

10.3. Satz (Schauder). *Ein Operator $A\colon X \to Y$ ist genau dann kompakt, wenn $A^*\colon Y' \to X'$ kompakt ist.*

Bevor wir Fredholm-Operatoren einführen, geben wir ein typisches Beispiel.

10.4. Beispiel. Es sei $1 \le p \le \infty$, und ℓ^p sei der Raum der p-summierbaren Folgen aus Beispiel 1.22 (1), indiziert durch die Menge $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, \dots\}$. Wir definieren zwei „Verschiebe-Operatoren“ L_p, $R_p\colon \ell^p \to \ell^p$ durch

$$L_p\big((a_n)_n\big) = (a_{n+1})_n \qquad \text{und} \qquad R_p\big((a_n)_n\big) = (a_{n-1})_n \text{ mit } a_{-1} = 0 \,.$$

Die folgenden Eigenschaften sich leicht zu überprüfen.

(1) Der Operator L_p ist surjektiv mit eindimensionalem Kern

$$N(L_p) = \left\{ (a_n)_n \in \ell^p \;\middle|\; a_1 = a_2 = \dots = 0 \right\} \cong \Bbbk \;.$$

(2) Der Operator L_q ist injektiv mit Bild

$$R(R_p) = \left\{ (a_n)_n \in \ell^p \;\middle|\; a_0 = 0 \right\} \;.$$

Insbesondere ist das Bild abgeschlossen und der Kokern $\ell^p/R(R_p) \cong \Bbbk$ eindimensional.

(3) Die Operatoren L_p und R_p sind „invertierbar bis auf kompakte Operatoren," genauer gesagt gilt

$$\mathrm{id}_{\ell^p} - L_p \circ R_p = 0 \in \mathcal{K}(\ell^p) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{id}_{\ell^p} - R_p \circ L_p = \big((a_n)_n \mapsto (a_0, 0, \dots)\big) \in \mathcal{K}(\ell^p) \;.$$

(4) Es sei $1 \le p < \infty$ und $1 < q \le \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, so dass $\ell^q = (\ell^p)'$. Dann ist R_q zu L_p und L_q zu R_p adjungiert.

Operatoren mit diesen Eigenschaften gibt es selbstverständlich nur auf unendlich-dimensionalen Vektorräumen.

Für einen Unterraum $U \subset X$ eines Banachraums bezeichne X/U den Quotienten im Sinne der linearen Algebra. Die Aussage „$\dim(X/U) < \infty$" bedeutet dann, dass es ein endlich-dimensionales Komplement $V \subset X$ von U im Sinne der linearen Algebra gibt. In Wirklichkeit betrachten wir hier stets abgeschlossene Unterräume $U \subset X$, aber das sehen wir erst in den Übungen, siehe Bemerkung 10.7 (1).

10.5. Definition. Ein beschränkter Operator $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ zwischen Banach-Räumen heißt *Fredholm-Operator,* wenn sein Kern $N(A)$ und sein Kokern $Y/R(A)$ endlich-dimensional sind. Wir bezeichnen die Menge aller Fredholm-Operatoren mit $\mathcal{F}(X, Y) \subset L(X, Y)$.

Der *Index* eines Fredholm-Operators $A \in \mathcal{F}(X, Y)$ ist definiert als

$$\mathrm{ind}(A) = \dim\big(N(A)\big) - \dim\big(Y/R(A)\big) \in \mathbb{Z} \;,$$

und wir schreiben $\mathcal{F}_k(X, Y) = \left\{ A \in \mathcal{F}(X, Y) \;\middle|\; \mathrm{ind}(A) = k \right\}$.

10.6. Beispiel. Es folgen einige offensichtliche Beispiele

(1) Eine Matrix $A \in M_{m,n}(\Bbbk)$ beschreibt eine lineare Abbildung $A \colon \Bbbk^n \to \Bbbk^m$. Nach dem Rangsatz ist A Fredholm vom Index $n - m$.

(2) Die Identität id_X ist ein Fredholm-Operator auf X vom Index 0.

(3) Die Verschiebe-Operatoren L_p und R_p sind Fredholm-Operatoren mit

$$\mathrm{ind}(L_p) = 1 \qquad \text{und} \qquad \mathrm{ind}(R_p) = -1 \;.$$

Andere wichtige Beispiele finden sich in der Theorie elliptischer partieller Differentialgleichungen, und zum Beispiel auch in der Hodge-Theorie auf kompakten Mannigfaltigkeiten. Erstaunlicherweise hat der Fredholm-Index für „geometrische" Operatoren wie in der Hodge-Theorie eine rein topologische Beschreibung. Dies kann man zum einen ausnutzen, um die Existenz von Lösungen vorherzusagen. Zum anderen kann man manchmal den Index rein analytisch bestimmen und daraus topologische Schlussfolgerungen ziehen.

10.7. Bemerkung. In den Übungen beweisen wir außerdem

(1) Das Bild eines Fredholm-Operators ist abgeschlossen.

(2) Sei $A \in \mathcal{F}(X, Y)$, dann existiert $B \colon Y \to X$, so dass $\mathrm{id}_X - BA \in \mathcal{K}(X)$ und $\mathrm{id}_Y - AB \in \mathcal{K}(Y)$. Wenn A ein Differentialoperator ist, nennt man B eine *Parametrix* von A. Sie ist nicht eindeutig bestimmt.

(3) Aus dem Satz 10.8 von Riesz-Schauder folgt umgekehrt: Wenn $A \colon X \to Y$ und $B \colon Y \to X$ stetig und $\mathrm{id}_X - BA$ und $\mathrm{id}_Y - AB$ kompakt sind, sind A und B Fredholm.

Also sind Fredholm-Operatoren genau diejenigen stetigen Operatoren, die *modulo kompakter Operatoren invertierbar* sind. Dies ist eine mögliche alternative Definition, die für manche Überlegungen recht praktisch ist.

10.8. Satz (Riesz-Schauder). *Es sei $F \in L(X,Y)$ invertierbar und $K \in K(X,Y)$ kompakt, dann ist $F+K$ ein Fredholm-Operator vom Index* 0.

10.9. Bemerkung. Umgekehrt ist jeder Fredholm-Operator A vom Index 0 vom Typ $A = F+K$ mit F invertierbar und K kompakt. Dazu wähle ein Komplement $X_0 \subset X$ von $N(A)$ und ein Komplement $Y_0 \subset Y$ von $R(A)$. Das geht, da $N(A)$ und $Y/R(A)$ endlich-dimensional sind. Sei schließlich $F_0\colon N(A) \to Y_0$ ein beliebiger Isomorphismus, dann setze

$$F = A|_{X_0} \oplus F_0\colon X = X_0 \oplus N(A) \longrightarrow R(A) \oplus Y_0 = Y\ .$$

Aus dem Satz vom abgeschlossenen Bild 5.15 oder dem Beweis des obigen Satzes folgt $R(A) = N(A^*)^\perp$. Wir erhalten die sogenannte *Fredholm-Alternative* für die Lösungsmenge der Gleichung

$$Ax = y \tag{*}$$

für eine gegebene rechte Seite $y \in Y$.

- Entweder ist die inhomogene Gleichung (*) für alle rechten Seiten $y \in Y$ eindeutig lösbar,
- oder die homogene Gleichung hat nichttriviale Lösungen.

In beiden Fällen ist $Ax = y$ genau dann lösbar, wenn

$$y \in N(A^*)^\perp\ .$$

Für das nächste Resultat benötigen wir ein wichtiges technisches Hilfsmittel.

10.10. Lemma (Neumann-Reihe). *Es seien X, Y Banachräume, $F\colon X \to Y$ sei invertierbar, und $c = \|F^{-1}\|_{\mathrm{op}}^{-1} > 0$. Dann ist jede Abbildung $G \in \mathcal{L}(X,Y)$ mit $\|F-G\|_{\mathrm{op}} < c$ invertierbar und die Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} F^{-1} \circ \big((F-G) \circ F^{-1}\big)^k \quad \in \mathcal{L}(Y,X)$$

konvergiert in der Operatornorm gegen G^{-1}.

10.11. Satz. *Die Menge $\mathcal{F}(X,Y) \subset L(X,Y)$ ist offen in der Operatornorm, und der Index ist lokal konstant.*

10.12. Folgerung. *Es sei $F \in \mathcal{F}(X,Y)$ ein Fredholm-Operator und $K \in \mathcal{K}(X,Y)$ kompakt. Dann ist $F+K$ ebenfalls Fredholm und vom gleichen Index wie F.*

10.13. Proposition. *Es seien $A \in \mathcal{F}(Y,Z)$ und $B \in \mathcal{F}(X,Y)$ Fredholm. Dann ist auch $A \circ B\colon X \to Z$ Fredholm, und es gilt*

$$\operatorname{ind}(A \circ B) = \operatorname{ind}(A) + \operatorname{ind}(B)\ .$$

10.14. Beispiel. Wir betrachten den Laplace-Operator unter Dirichlet-Randbedingungen auf einem beschränkten Gebiet Ω mit hinreichend schönem Rand, wie in den Beispielen 0.1, 5.21 und 7.27. Man kann zeigen, dass

$$\Delta\colon H^2_0(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$$

invertierbar ist. Sei jetzt $V \in L^\infty(\Omega)$ ein *Potential.* Da Multiplikation mit V einen stetigen Operator $V\colon L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ definiert, ist die Verkettung mit der Inklusion von $H^2_0(\Omega)$ nach dem Satz 9.12 von Rellich kompakt. Nach dem Satz 10.8 von Riesz-Schauder erhalten wir einen Fredholm-Operator

$$\Delta + V\colon H^2_0(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega) \qquad \text{mit} \qquad f \mapsto \Delta f + V \cdot f$$

vom Index 0.

Insbesondere ist nach Bemerkung 10.9 die Gleichung

$$(\Delta + V)f = g$$

genau dann für alle $g \in L^2(\Omega)$ eindeutig lösbar, wenn $N(\Delta + V) = 0$. In jedem Fall existiert eine Lösung, wenn

$$g \in R(\Delta + V) = N\big((\Delta + V)^*\big)^\perp = N(\Delta + V)^\perp\ .$$

Letzteres gilt, da $\Delta + V\colon H_0^2(\Omega) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ nach Beispiel 5.21 (4) ein symmetrischer Operator ist.

KAPITEL 11

Spektrum und Resolvente

Im letzten Kapitel interessieren wir uns für eine Verallgemeinerung des Begriffs „Eigenwert“ aus der linearen Algebra. In einfachen Fällen reichen Eigenwerte zwar aus, um das Verhalten eines Operators gut zu beschreiben, siehe etwa Satz 7.28. Aber im Gegensatz zum endlich-dimensionalen Fall sind Eigenwerte und Jordan-Blöcke nicht die einzigen Phänomene, die auftauchen können. Beispielsweise könnten „Eigenvektoren außerhalb des Definitionsbereichs“ existieren, die man nur approximativ erkennen kann.

Zur Definition des Spektrums führt man zuerst Resolventen ein. Eine weitere Motivation, Resolventen zu betrachten, ist der holomorphe Funktionalkalkül, mit dem man gewisse Funktionen auf Operatoren anwenden kann. Wichtige Beispiele sind Wärmeleitungs-, Wellen- und Schrödingeroperatoren wie in Beispiel 0.2 erwähnt.

11.1. Bemerkung. Wir beginnen mit Vorüberlegungen zu unbeschränkten Operatoren.

(1) Es sei $A\colon D(A) \subset X \to Y$ ein unbeschränkter Operator. Dann ist $A^{-1}\colon R(A) \subset Y \to X$ genau dann wohldefiniert, wenn $N(A) = 0$.
(2) Der inverse Operator A^{-1} aus (1) ist genau dann abgeschlossen, wenn A abgeschlossen ist.
(3) Sei A abgeschlossen und $N(A) = 0$. Dann ist A^{-1} genau dann beschränkt, wenn $R(A) = X$.
(4) Sei $B \in \mathcal{L}(X, Y)$ ein beschränkter Operator. Dann ist $A+B\colon D(A) \subset X \to Y$ genau dann abgeschlossen, wenn A abgeschlossen ist.

Wie in der linearen Algebra auch konzentrieren wir uns ab jetzt auf komplexe Banach- und Hilberträume. Der Kürze halber schreiben wir für $\lambda \mathrm{id}_X$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$ im Folgenden einfach λ, wenn klar ist, auf welchem Raum λ operieren soll.

11.2. Definition. Es sei $A\colon D(A) \subset X \to X$ ein unbeschränkter, dicht definierter, abgeschlossener Operator auf einem Banachraum. Das Spektrum von A ist definiert als

$$\operatorname{spec}(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; A - \lambda \text{ ist nicht beschränkt invertierbar} \right\} .$$

Die Menge $\mathbb{C} \setminus \operatorname{spec}(A)$ heißt auch *Resolventenmenge,* und für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{spec}(A)$ heißt $R_\lambda(A) = (A - \lambda)^{-1}\colon X \to X$ die *Resolvente* von A an der Stelle λ.

Wir definieren außerdem

(1) das *Punktspektrum*

$$\operatorname{spec}_{\mathrm{p}} = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; N(A - \lambda) \neq 0 \right\} ,$$

(2) das *kontinuierliche Spektrum*

$$\operatorname{spec}_{\mathrm{c}} = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; N(A - \lambda) = 0, R(A - \lambda) \neq X,\ \text{aber } \overline{R(A - \lambda)} = X \right\} ,$$

(3) und das *residuelle Spektrum*

$$\operatorname{spec}_{\mathrm{r}} = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; N(A - \lambda) = 0 \text{ und } \overline{R(A - \lambda)} \neq X \right\} .$$

11.3. Bemerkung. Aufgrund der Vorbemerkung zerlegt sich das Spektrum disjunkt in das Punktspektrum, das kontinuierliche und das residuelle Spektrum.

(1) Das Punktspektrum besteht genau aus den Eigenwerten von A, denn

$$x \in N(A-\lambda) \qquad \Longleftrightarrow \qquad Ax = \lambda x \,.$$

Daher heißt $N(A-\lambda)$ der λ-*Eigenraum* von A, und Elemente heißen λ-*Eigenvektoren* oder λ-*Eigenfunktionen.*

(2) Ein *approximativer Eigenwert* von A ist eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$, so dass eine Folge $(x_k)_k$ von Einheitsvektoren in X mit

$$\lim_{k\to\infty} (A-\lambda)(x_k) = 0$$

existiert. Diese Folgen nennen wir dann auch *approximative λ-Eigenvektoren* oder *-funktionen.* Wenn $\lambda \in \operatorname{spec}_{\mathrm{p}}(A)$ ein Eigenwert ist, können wir eine konstante Folge zu einem Eigenvektor von A wählen. Andernfalls divergiert die Folge $(x_k)_k$ in X.

Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ ist approximativer Eigenwert, wenn $R(A-\lambda) \subset X$ kein abgeschlossener Unterraum ist. Insbesondere sind Elemente des kontinuierlichen Spektrums $\operatorname{spec}_c(A)$ stets approximative Eigenwerte.

(3) Elemente $\lambda \in \operatorname{spec}_{\mathrm{r}}(A)$ des residuellen Spektrums sind nach Definition keine Eigenwerte. Sie können approximative Eigenwerte sein, müssen aber nicht.

Es gibt weitere interessante Teilmengen und Zerlegungen des Spektrums, auf die wir hier nicht eingehen wollen.

11.4. Beispiel. Wir betrachten das Spektrum einer Reihe unterschiedlicher Operatoren.

(1) Es sei $\hat{x}_j$ der Ortsoperator auf $L^(\mathbb{R}^3)$ aus Beispiel 5.4 (1) mit $(\hat{x}_j f)(x) = x_j\, f(x)$. Die Resolventenmenge enthält $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, denn für alle $\lambda \notin \mathbb{R}$ ist die Funktion $\frac{1}{x_j-\lambda}$ beschränkt durch $\frac{1}{|\operatorname{Im}\lambda|}$. Die Resolvente $R_\lambda(\hat{x}_j)$ ist genau die Multiplikation mit dieser Funktion.

Für $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $\hat{x}_j - \lambda$ injektiv, aber nicht surjektiv, denn sei f konstant 1 auf einer Umgebung U eines Punktes $x \in \mathbb{R}^3$ mit $x_j = \lambda$, dann liegt $\frac{1}{x_j-\lambda}$ nicht in $L^2(U)$.

Da aber $\{\, x \in \mathbb{R}^3 \mid x_j = \lambda \} \subset \mathbb{R}^3$ eine Lebesgue-Nullmenge ist, folgt

$$L^2(\mathbb{R}^3) = L^2\big(\big\{\, x \in \mathbb{R}^3 \bigm| x_j \neq \lambda \,\big\}\big) = \overline{C_c^0(\{\, x \in \mathbb{R}^3 \mid x_j \neq \lambda \})} \,,$$

aus Satz 1.30, und

$$C_c^0\big(\big\{\, x \in \mathbb{R}^3 \bigm| x_j \neq \lambda \,\big\}\big) \subset R(\hat{x}_j - \lambda) \,.$$

Folglich gilt

$$\operatorname{spec}(\hat{x}_j) = \operatorname{spec}_{\mathrm{c}}(\hat{x}_j) = \mathbb{R} \,.$$

Als approximative Eigenfunktionen betrachte Folgen von Funktionen f_k mit L^2-Norm 1 und

$$\operatorname{supp} f_k \subset \big\{\, x \in \mathbb{R}^3 \bigm| |x_j - \lambda| \leq 1/k \,\big\} \,.$$

(2) Der Impulsoperator $\hat{p}_j = -i\hbar\,\partial_j$ aus Beispiel 5.4 (2) geht unter Fouriertransformation in den Ortsoperator über und hat daher das gleiche Spektrum. Allerdings ist es nicht ganz so einfach, die Resolventen explizit anzugeben.

(3) Wir betrachten den Laplace-Operator $\Delta = \Delta_{\Omega,0}$ auf einem beschränkten Gebiet mit konvexem Rand (Lipschitz würde reichen) unter Dirichlet-Randbedingungen wie in Satz 7.28. Dort haben wir eine Hilbertbasis von $L^2(\Omega)$ konstruiert, die $\Delta_{\Omega,0}$ „diagonalisiert“.

Die Menge $\operatorname{spec}_{\mathrm{p}}(-\Delta_{\Omega,0})$ der Eigenwerte ist diskret in $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ (das Minuszeichen sorgt dafür, dass der Operator positive Eigenwerte hat). Für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{spec}_{\mathrm{p}}(-\Delta_{\Omega,0})$ gilt somit $d(\lambda, \operatorname{spec}_{\mathrm{p}}(-\Delta_{\Omega,0})) > 0$, und die Resolvente $R_\lambda(-\Delta_{\Omega,0})$ ist durch das Inverse dieses Abstands beschränkt, vergleiche Lemma 11.8 (1) unten.

Es folgt

$$\operatorname{spec}(-\Delta_{\Omega,0}) = \operatorname{spec}_{\mathrm{p}}(-\Delta_{\Omega,0}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\} .$$

(4) Als nächstes sei L_p der Verschiebeoperator auf ℓ^p aus Beispiel 10.4, der Einfachheit halber mit $1 < p < \infty$. Aus den Übungen kennen wir die Eigenwerte und das Spektrum. Man kann zeigen, dass

$$\operatorname{spec}(R_p) = \operatorname{spec}_{\mathrm{p}}(R_p) \mathbin{\dot\cup} \operatorname{spec}_{\mathrm{c}}(R_p) \quad \text{mit} \quad \operatorname{spec}_{\mathrm{c}}(R_p) = S^1 \quad \text{und} \quad \operatorname{spec}_{\mathrm{p}}(R_p) = B_1(0) .$$

Man beachte, dass selbst im Fall $p = 2$ Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten nicht aufeinander senkrecht stehen.

(5) Auf der anderen Seite hat R_p für $1 < p < \infty$ keine Eigenwerte (Übung). Man kann zeigen, dass

$$\operatorname{spec}(R_p) = \operatorname{spec}_{\mathrm{c}}(R_p) \mathbin{\dot\cup} \operatorname{spec}_{\mathrm{r}}(R_p) \quad \text{mit} \quad \operatorname{spec}_{\mathrm{c}}(R_p) = S^1 \quad \text{und} \quad \operatorname{spec}_{\mathrm{r}}(R_p) = B_1(0) .$$

Für $\lambda \in \operatorname{spec}_{\mathrm{r}}(R_p)$ ist $R_p - \lambda$ ein Fredholm-Operator, insbesondere ist $R(R_p - \lambda)$ abgeschlossen, und λ daher kein approximativer Eigenwert.

Für kompakte Operatoren lässt sich das Spektrum recht detailliert beschreiben. Für Automorphismen endlich-dimensionaler Vektorräume kennen wir bereits die Jordan-Normalform, also konzentrieren wir uns jetzt auf unendlich-dimensionale Banachräume.

11.5. Satz. *Es sei $A \in \mathcal{K}(X)$ ein kompakter Operator auf einem unendlich-dimensionalen Banachraum X. Dann*

(1) *liegt 0 stets im Spektrum von A,*
(2) *alle $\lambda \in \operatorname{spec}(A) \setminus \{0\}$ sind Eigenwerte endlicher Multiplizität, und*
(3) *das Spektrum ist entweder endlich oder abzählbar mit einzigem Häufungspunkt 0.*

11.6. Folgerung (Spektralsatz für selbstadjungierte kompakte Operatoren). *Sei $A \in \mathcal{K}(H)$ ein kompakter selbstadjungierter Operator auf einem unendlich-dimensionalen Hilbertraum H. Dann existiert eine endliche oder abzählbare Folge von Eigenwerten $\lambda_k \in \mathbb{R}$ mit*

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \qquad \textit{und} \qquad \lambda_k \to 0 \qquad \textit{für } k \to \infty$$

und Vektoren $e_k \in V$ mit

$$Ae_k = \lambda_k e_k \qquad \textit{und} \qquad \langle e_j, e_k \rangle = \delta_{jk} .$$

Auf dem orthogonalen Komplement der Vektoren e_k verschwindet A.

Insbesondere gilt

$$\operatorname{spec}(A) = \operatorname{spec}_{\mathrm{p}}(A) \cup \{0\} \subset \mathbb{R} \qquad \textit{mit} \qquad \operatorname{spec}_{\mathrm{p}}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\} ,$$

und 0 liegt entweder im kontinuierlichen oder im Punktspektrum.

Im Folgenden wollen wir uns die Resolventen als eine Familie von Operatoren auf $\mathbb{C} \setminus \operatorname{spec}(A)$ auffassen. Mit einigen Anleihen aus der Funktionentheorie können wir dadurch weitere Aussagen über den Operator A treffen. Insbesondere sehen wir, wie wir gewisse holomorphe (das bedeutet, komplex differenzierbare) Funktionen auf den Operator A anwenden können.

11.7. Bemerkung. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und Y ein Banachraum über $\Bbbk = \mathbb{C}$. Dann können wir für Funktionen $f \colon U \to Y$ eine komplexe Ableitung definieren durch

$$f'(z) = \lim_{w \to z} \frac{1}{w - z} \big(f(w) - f(z) \big) \quad \in Y .$$

Der Grenzwert bezüglich der Norm ist sinnvoll definiert, wir können also über (starke) „Differenzierbarkeit“ und (starke) „Ableitung“ sprechen (andere Konvergenzbegriffe sind möglich und führen zu anderen Differenzierbarkeitsbegriffen). Komplex differenzierbare Abbildungen heißen auch *holomorph.*

Außerdem benötigen wir eine Banachraum-wertige Version des Riemann-Integrals

$$\int_a^b A(t)\,dt = \lim_{a=t_0\le\tau_1\le t_1\le\cdots\le t_N=b} \sum_{k=1}^N (t_k - t_{k-1})\,A(\tau_k) \qquad \in Y$$

für eine Abbildung $A\colon [a,b]\to Y$. Dabei geht der Limes über alle Unterteilungen $a = t_0 < \cdots < t_N = b$ des Intervals $[a,b]$ mit Feinheit $\max_{1\le k\le N}(t_k - t_{k-1}) \to 0$ und alle Wahlen von Zwischenstellen $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$. Wenn dieser Grenzwert bezüglich der Norm auf Y existiert, heißt A (stark) integrierbar (für andere Formen der Konvergenz erhalten wir andere Integrationsbegriffe). Wenn die Abbildung $A\colon [a,b]\to Y$ bezüglich der Norm stetig ist, ist A stark integrierbar.

Wir definieren das *komplexe Kurvenintegral* von $f\colon U\to Y$ entlang einer Kurve $\gamma\colon [a,b]\to U$ durch

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b \dot\gamma(t)\,f(\gamma(t))\,dt \qquad \in Y\;.$$

Dieses Integral existiert beispielsweise dann, wenn γ eine C^1-Kurve und $f\colon U\to\mathcal{L}(X)$ bezüglich der Operatornorm stetig ist.

Jetzt können wir klassische Sätze aus der Funktionentheorie in die Funktionalanalysis übertragen. Sei beispielsweise γ eine in U zusammenziehbare geschlossene Kurve und $f\colon U\to Y$ holomorph, dann gilt

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0 \in Y\;.$$

Das nächste Resultat beweisen wir mit Hilfe der Neumann-Reihe aus Lemma 10.10.

11.8. Lemma (Resolventen-Identitäten). *Es sei $A\colon D(A)\subset X\to X$ ein unbeschränkter, abgeschlossener, dicht definierter Operator auf X und $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\operatorname{spec}(A)$.*

(1) *Für alle $\mu\in\mathbb{C}$ mit $|\mu-\lambda| < \|R_\lambda(A)\|_{\mathrm{op}}^{-1}$ gilt $\mu\in\mathbb{C}\setminus\operatorname{spec}(A)$ und*

$$R_\mu(A) - R_\lambda(A) = R_\mu(A)\,(\mu-\lambda)\,R_\lambda(A)\;.$$

(2) *Es sei $B\colon D(B)\subset X\to X$ ein weiterer unbeschränkter, abgeschlossener, dicht definierter Operator, so dass $B-A$ beschränkt ist mit $\|B-A\|_{\mathrm{op}} < \|R_\lambda(A)\|_{\mathrm{op}}^{-1}$. Dann gilt $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\operatorname{spec}(B)$ und*

$$R_\lambda(B) - R_\lambda(A) = R_\lambda(B)\,(B-A)\,R_\lambda(A)\;.$$

Insbesondere ist $\operatorname{spec}(A)$ abgeschlossen in $\mathbb{C}$. Die Resolvente von A ist somit auf $\mathbb{C}\setminus\operatorname{spec}(A)$ komplex differenzierbar mit

$$R_z'(A) = R_z(A)^2\;.$$

11.9. Definition. Es sei $A\in\mathcal{L}(X)$ beschränkt, dann definiere den *Spektralradius* von A durch

$$\rho(A) = \sup\bigl\{\,|\lambda|\;\big|\;\lambda\in\operatorname{spec}(A)\,\bigr\}\;.$$

Abgesehen von der Aussage $\operatorname{spec}(A)\ne\emptyset$ lässt sich der folgende Satz auch ohne Funktionentheorie beweisen, siehe [**2**, Ex. 6.23].

11.10. Satz. *Es sei A ein beschränkter Operator auf einem Banachraum $X\ne 0$. Dann ist sein Spektrum* $\operatorname{spec}(A)$ *eine nicht-leere kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$, und es gilt*

$$\rho(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|_{\mathrm{op}}^{\frac1n}\;.$$

11.11. Folgerung. *Es sei $A \in \mathcal{L}(H)$ ein beschränkter selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum $H \neq 0$. Dann gilt*

$$\operatorname{spec}(A) = \operatorname{spec}_{\mathrm{p}}(A) \dot\cup \operatorname{spec}_{\mathrm{c}}(A) \subset [-\rho(A), \rho(A)] \subset \mathbb{R} ,$$

und $\rho(A) \in \operatorname{spec}(A)$ oder $-\rho(A) \in \operatorname{spec}(A)$.

11.12. Bemerkung. Zum Schluss möchte ich eine Anwendung von Resolventen und Spektraltheorie skizzieren, den sogenannten *holomorphen Funktionalkalkül.* Ein Funktionalkalkül ordnet einer Klasse von Funktionen φ und einer Klasse von Operatoren A neue Operatoren $\varphi(A)$ zu. Beispielsweise ergäbe $x \mapsto x^2$ angewandt auf A den Operator $A^2 = A \circ A$. Auf beschränkte Operatoren lassen sich Polynome problemlos direkt anwenden. Im Falle unbeschränkter Operatoren hingegen wäre A^2 nur auf $A^{-1}(R(A)) \subset D(A)$ definiert, und dieser Raum könnte sehr klein sein (im schlimmsten Fall 0), selbst wenn A dicht definiert ist und dichtes Bild hat.

Im Beweis von Satz 11.10 haben wir gesehen, dass

$$A^n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{z^n}{z - A}\, dz .$$

Einzige Voraussetzung ist $\rho(A) < r$. Völlig analog können wir für eine Potenzreihe

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^n$$

mit Konvergenzradius $R > r$ und einen Operator A mit $\rho(A) < r$ zeigen, dass

$$P(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{P(z)}{z - A}\, dz .$$

Dabei konvergiert die linke Seite als Potenzreihe in A, die rechte als Integral.

Unter bestimmten Umständen lässt sich diese Methode auf unbeschränkte Operatoren erweitern. Betrachte etwa den Laplace-Operator $\Delta = \Delta_{\Omega,0}$ auf einem beschränkten Gebiet mit „schönem“ Rand unter Dirichlet-Randbedingungen wie in Satz 7.28 und Beispiel 11.4 (3). Sei $(e_k)_k$ eine Hilbert-Basis aus Eigenfunktionen zu den Eigenwerten $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$. Falls φ eine Funktion auf der positiven Halbachse ist, definieren wir $\varphi(-\Delta_{\Omega,0})$ auf den Basiselementen durch

$$\varphi(-\Delta_{\Omega,0})(e_k) = \varphi(\lambda_k)\, e_k . \tag{1}$$

Wenn φ auf einem Gebiet der Form $\{\, x + iy \mid x \geq -2r, -2r \leq y \leq 2r \,\} \subset \mathbb{C}$ holomorph ist und für $\operatorname{Re} z \to \infty$ ausreichend schnell abfällt, wählen wir für $r > 0$ einen Weg $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit

$$\gamma(t) = \begin{cases} -\bigl(t + \frac{\pi}{2}\bigr) + ri & \text{für } t \leq -\frac{\pi}{2}, \\ -r\, e^{it} & \text{für } -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \text{ und} \\ \bigl(t - \frac{\pi}{2}\bigr) - ri & \text{für } \frac{\pi}{2} \leq t, \end{cases}$$

so dass

$$\varphi(-\Delta_{\Omega,0}) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\varphi(z)}{z + \Delta_{\Omega,0}}\, dz . \tag{2}$$

Die Gleichheit der beiden Darstellungen lässt sich mit Hilfe des Residuensatzes beweisen.

Ein Vorteil der Integraldarstellung (2) besteht darin, dass sie keine Hilbertbasis benötigt. Mit Hilfe der zweiten Resolventenidentität 11.8 (2) kann man $\varphi(A)$ in der Integraldarstellung für verschiedene Operatoren vergleichen (im Falle des Laplace-Operators könnte man beispielsweise verschiedene Potentiale dazuaddieren). In der Darstellung (1) hingegen müsste man dazu einen Basiswechsel durchführen.

Schließlich lässt sich die Integraldarstellung auf Operatoren verallgemeinern, die sich nicht diagonalisieren lassen, etwa, weil ein Teil des Spektrums kontinuierlich oder residuell ist. Ein Beispiel hierfür ist der Laplace-Operator Δ auf einem unbeschränkten Gebiet (mit nach wie vor „schönem" Rand).

Ein Beispiel ist die Darstellung des Wärmeleitungsoperators als

$$e^{t\Delta} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{e^{-tz}}{z + \Delta}\, dz \; . \tag{3}$$

Man kann zeigen, dass die rechte Seite von (3) angewandt auf eine Funktion f auf Ω die Wärmeleitungsgleichung aus Beispiel 0.2 (1) erfüllt. Schwieriger ist der Beweis, dass $e^{t\Delta} f \to f$ für $t \to 0$.

Literatur

[1] H. W. Alt, *Lineare Funktionalanalysis,* 6. Aufl., Springer (2012),
http://www.redi-bw.de/start/unifr/EBooks-springer/10.1007/978-3-642-22261-0

[2] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations,* Springer (2011),
http://www.redi-bw.de/start/unifr/EBooks-springer/10.1007/978-0-387-70914-7

[3] S. Goette, *Lineare Algebra I-II,* http://home.mathematik.uni-freiburg.de/goette/Skripten/LA.pdf

[4] E. Kuwert, *Analysis I,* http://home.mathematik.uni-freiburg.de/analysis/lehre/skripten/AnalysisI.pdf

[5] ——, *Analysis II,* http://home.mathematik.uni-freiburg.de/analysis/lehre/skripten/skript.pdf

[6] ——, *Analysis III,*
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/analysis/lehre/skripten/skriptAnaIII.pdf

[7] ——, *Funktionalanalysis,*
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/analysis/lehre/skripten/FA_SS14.pdf

[8] M. Ruzicka, *Funktionalanalysis,* https://aam.uni-freiburg.de/agru/lehre/ss19/fa-brez-script.pdf