PROBEKlausur: "Funktionalanalysis" SS 2021

Tipp:	Schreiben Sie die Probeklausur unter möglichst realitätsnahen Bedingungen.
Datum und Uhrzeit:	- Uhr
Prüfungsdauer:	2 Stunden
Raum:	HS 1010, KG I (Corona-Bedingungen)
Prüfer:	Prof. Dr. Sebastian Goette

Nachname: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Fach: ....

Studiengang: ☐ Bachelor ☐ Master ☐ Lehramt ☐ sonstiges

Unterschrift: ....

Anmerkungen:

- Zusätzliche Blätter sind mit Namen und Matrikelnummer zu versehen.
- Für jede Aufgabe ist eine neue Seite/Bogen zu beginnen.
- Mobiltelefone müssen ausgeschaltet und am Eingang abgegeben werden.
- Elektronische Hilfsmittel (Taschenrechner,...) jeglicher Art sind **nicht** zugelassen.
- Erlaubte Hilfsmittel: ein doppelseitig handschriftlich beschriebenes DIN A4 Blatt
- **Alle Ergebnisse sind zu begründen bzw. herzuleiten. Aussagen aus der Aufgabenstellung vorangegangener Aufgabeteile dürfen Sie im Rest der Aufgabe verwenden.**

	Max. Anzahl Punkte	Erreichte Punkte	Bemerkung
Aufgabe 1	4		
Aufgabe 2	4		
Aufgabe 3	4		
Aufgabe 4	4		
Aufgabe 5	4		
Summe:	**20**		

Note: ....

Klausur eingesehen am: ....

Unterschrift des Prüfers: ....

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Beantworten Sie die folgenden Fragen mit Ja oder Nein **und** geben Sie nur eine knappe Begründung, z.B. ein Gegenbeispiel (ein oder zwei Sätze; kein vollständiges Argument!). Wenn Sie einen Satz aus der Vorlesung nutzen, geben Sie die entsprechende Aussage jedoch inklusive Annahmen und Behauptung komplett an.

1. Es sei $A\colon D(A) \subseteq X \to Y$ unbeschränkt und abgeschlossen mit $N(A) = 0$ und $R(A) = Y$. Dann ist A^{-1} beschränkt.

2. Es sei X ein Banachraum, $x \in X$ und $M \subseteq X$ eine Teilmenge. Falls alle stetigen Funktionale, die auf M verschwinden, auch auf x verschwinden, dann gilt $x \in \overline{\mathrm{span} M}$

3. Es sei $1 \leq p < q < \infty$ und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar, dann gilt $L^q(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$.

4. Es sei X ein Banachraum, $A \in \mathcal{L}(X)$ und $\lambda \in \mathrm{spec}(A)$. Dann gilt $|\lambda| \leq \|A\|_{\mathrm{op}}$.

Aufgabe 2: (4 Punkte=1+1+2 Punkte)
Es sei $A\colon C^0([0,1]) \to C^1([0,1])$ definiert durch

$$Af(x) = \int_0^x f d\lambda.$$

1. Zeigen Sie, dass A stetig bezüglich der Supremumsnorm auf $C^0([0,1])$ und der C^1-Norm auf $C^1([0,1])$ ist.

2. Zeigen Sie, dass A, aufgefasst als eine Abbildung von $C^0([0,1])$ nach $C^0([0,1])$, ein kompakter Operator ist.

3. Zeigen Sie, dass das Bild des abgeschlossenen Einheitsballes nicht abgeschlossen ist.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Es sei H ein separabler Hilbertraum mit zwei Hilbertbasen $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ und $\{f_{n,m}\}_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$. Es bezeichne $D(A) = \operatorname{span}\{f_{n,m}\}_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ das Erzeugnis der Vektoren im SInne der linearen Algebra und $A\colon D(A) \subseteq H \to H$ den Operator, der gegeben ist durch

$$Af_{n,m} = me_n.$$

1. Zeigen Sie, dass A dicht definiert und nicht beschränkt ist.
2. Es sei $A^*\colon D(A^*) \subset H' \to H'$ der zu A adjungierte Operator. Zeigen Sie, dass $D(A^*) = \{0\}$.

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Es sei X ein reflexiver Banachraum, Y ein Banachraum und $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Zeigen Sie, dass das Bild der abgeschlossenen Einheitskugel $A(\overline{B_X})$ (stark) abgeschlossen ist.

Aufgabe 5: (4 Punkte)
Es sei $\phi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\phi(x) = \begin{cases} 2x, & \text{für } x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 1, & \text{für } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

1. Zeigen Sie, dass

$$M_\phi\colon L^2([0,1]) \ni f \mapsto \phi f \in L^2([0,1])$$

   eine stetige lineare Abbildung ist.

2. Berechnen Sie das Punktspektrum, das kontinuierliche und das residuelle Spektrum von M_ϕ.