Algebraische Topologie
Wintersemester 2019/2020

Prof. Dr. Sebastian Goette
Dr. Severin Barmeier
Dr. Jonas Schnitzer

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/geometrie/lehre/ws19/AT/

Übungsblatt 13

Abgabetermin 06.02.2020

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt. Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Sofern nicht anders angegeben werden die Punkte gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Aufgabe 1. Es sei $f\colon X \to Y$ eine beliebige Abbildung. Beweisen Sie zwei der folgenden Aussagen aus Bemerkung 4.70.

(*i*) Die Pfadfaserung $Pf \to Y$ ist eine Hurewicz-Faserung mit Faser Ff.

(*ii*) Der Unterraum $\operatorname{im}(\iota) \cong X$ ist ein Deformationsretrakt von Pf.

(*iii*) Die Abbildung $f \circ (f^*\mathrm{ev}_1)$ ist zu $p\colon Pf \to Y$ punktiert homotop.

(*iv*) Wenn f eine Hurewicz-Faserung ist, ist $f^{-1}(y_0)$ zur Homotopiefaser Ff homotopieäquivalent.

Aufgabe 2. Es sei $\iota\colon S^2 \cong \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \to \mathbb{C}\mathrm{P}^\infty$ die Inklusion. Die Abbildung $S^1 \wedge S^1 \cong S^2 \to \mathbb{C}\mathrm{P}^\infty$ induziert eine Abbildung

$$S^1 \to \Omega^1(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty).$$

Zeigen Sie, dass diese Abbildung eine schwache Homotopieäquivalenz ist. Aus den Sätzen von Milnor und Whitehead folgt, dass sie sogar eine Homotopieäquivalenz ist.

Aufgabe 3. Es sei wieder $\iota\colon S^2 \cong \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \to \mathbb{C}\mathrm{P}^\infty$ die Inklusion und nun $F\iota$ ihre Homotopiefaser.

Da $\pi_3(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty) = 0$, lässt sich die durch die Hopf-Faserung induzierte Abbildung $g\colon S^3 \to S^2 \to \mathbb{C}\mathrm{P}^\infty$ auf ganz D^4 fortsetzen. Konstruieren Sie damit eine Abbildung $S^3 \to F\iota$. Zeigen Sie mit Hilfe der langen exakten Sequenz 3.25 für Faserungen, dass diese Abbildung eine schwache Homotopieäquivalenz ist.

Aufgabe 4. Gegeben sei eine lange exakte Sequenz

$$\cdots \longleftarrow A_{n-1} \xleftarrow{h_n} C_n \xleftarrow{g_n} B_n \xleftarrow{f_n} A_n \xleftarrow{h_{n+1}} C_{n+1} \longleftarrow \cdots$$

in einer abelschen Kategorie $\mathcal{C}$, dabei dürfen Sie $\mathcal{C} = \mathcal{M}od_R$ annehmen. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

(*i*) Für alle n existiert $k_n\colon B_n \to A_n$ mit $k_n \circ f_n = \mathrm{id}_{A_n}$.

(ii) Für alle n existiert $\ell_n\colon C_n \to B_n$ mit $g_n \circ \ell_n = \mathrm{id}_{C_n}$.

(iii) Für alle n existiert ein Isomorphismus $\phi_n\colon B_n \to A_n \oplus C_n$, so dass $\phi_n \circ f_n$ die natürliche Inklusion und $g_n \circ \phi^{-1}$ die natürliche Projektion ist, und $h_n = 0$.

Zeigen Sie außerdem, dass es natürliche Bijektionen zwischen den Mengen der möglichen Folgen $(k_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ in *(i)*, $(\ell_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ in *(ii)*, sowie der $(\phi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ in *(ii)* gibt.