

<http://home.mathematik.uni-freiburg.de/geometrie/lehre/ws19/AT/>

# Übungsblatt 8

Abgabetermin 19.12.2019

*Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt. Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Sofern nicht anders angegeben werden die Punkte gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.*

**Aufgabe 1.** Es sei  $X$  ein topologischer Raum. Wir interpretieren eine Äquivalenzrelation  $\sim$  als Teilmenge  $R_\sim = \{(x, y) \in X^2 \mid x \sim y\} \subseteq X^2$ . Zeigen Sie

- (i) Der Durchschnitt beliebig vieler Äquivalenzrelationen ist wieder eine Äquivalenzrelation, insbesondere gibt es eine minimale *abgeschlossene* Äquivalenzrelation  $\approx$  auf  $X$ .
- (ii) Sei  $q: X \rightarrow Y := X/\approx$ , dann ist  $\Delta_Y := \{(y, y) \mid y \in Y\}$  abgeschlossen, insbesondere ist  $Y$  Hausdorff.
- (iii) Sei  $Z$  ein Hausdorff-Raum, dann existiert zu jeder stetigen Abbildung  $f: X \rightarrow Z$  eine eindeutige Abbildung  $\bar{f}: Y \rightarrow Z$ , so dass  $f = \bar{f} \circ q$ .

**Aufgabe 2.** Es sei  $X$  ein topologischer Raum. Dann bezeichne  $kX$  den topologischen Raum mit der gleichen zugrundeliegenden Menge und der Topologie

$$\mathcal{O}_{kX} = \{U \mid f^{-1}(U) \subseteq K \text{ für alle kompakten Räume } K \text{ und für alle } f: K \rightarrow X\}$$

Kompakt impliziere hier stets Hausdorff. Zeigen Sie:

- (i)  $\text{id}: kX \rightarrow X$  ist stetig.
- (ii) Sei  $K$  kompakt, dann ist  $f: K \rightarrow X$  genau dann stetig, wenn  $f: K \rightarrow kX$  stetig ist.
- (iii)  $kkX \cong kX$ .

**Aufgabe 3.** Es sei  $k: \text{Top} \rightarrow \text{Top}$  definiert wie in Aufgabe 2. Zeigen Sie:

- (i) Sei  $g: X \rightarrow Y$  stetig, dann ist auch  $g: kX \rightarrow kY$  stetig. Insbesondere ist  $k$  ein Funktor.
- (ii) Es gilt

$$C(kX, Y) = C(kX, kY).$$

**Aufgabe 4.** Es sei  $O(n+1) = \{A \in GL_{n+1}(\mathbb{R}) \mid A^\top A = \text{Id}\}$  die orthogonale Gruppe. Wir interpretieren  $O(n) \subset O(n+1)$  als Untergruppe, die trivial auf  $e_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}$  wirkt. Zeigen Sie:

- (i)  $O(n+1)/O(n) \cong \mathbb{S}^n$ .
- (ii) Die Quotientenabbildung  $O(n+1) \rightarrow \mathbb{S}^n$  ist ein Faserbündel mit typischer Faser  $O(n)$ .
- (iii)  $\pi_k(O(n+1)) \cong \pi_k(O(n))$  und  $\pi_k(SO(n+1)) \cong \pi_k(SO(n))$  für alle  $k < n-1$ .