Prof. Dr. Sebastian Goette
Dr. Severin Barmeier
Dr. Jonas Schnitzer

Weihnachtsübungsblatt

Abgabetermin 9.1.2020

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt. Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Sofern nicht anders angegeben werden die Punkte gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt. Die Gesamtpunktzahl auf dem Weihnachtsübungsblatt beträgt 16 Punkte + 16 Bonuspunkte.

Aufgabe 1. Beweisen Sie die folgenden Aussagen über Kolimiten.

(*i*) Der Kolimes $\operatorname{colim}(A \xleftarrow{f} C \xrightarrow{g} B)$ erfüllt die universelle Eigenschaft des Pushout.

(*ii*) Jeder Kolimes lässt sich als Pushout von Koprodukten schreiben.

Aufgabe 2. Es sei $\mathcal{I}$ die Kategorie mit einem Objekt aus Beispiel 4.5 und $F \colon \mathcal{I} \to \mathcal{V}ec_{\Bbbk}$ ein Funktor. Beschreiben Sie F in Termen der linearen Algebra und geben Sie $\lim F$ und $\operatorname{colim} F$ an.

Aufgabe 3. Welche Rechenregeln ergeben sich aus Lemma 4.14 und dem Exponentialgesetz für Mengen aus Beispiel 4.3 (1)

(*i*) für disjunkte Vereinigungen und kartesische Produkte, sowie

(*ii*) für kartesische Produkte und Mengen von Abbildungen?

Aufgabe 4. Zeigen Sie in Analogie zu Aufgabe 3 auf dem fünften Übungsblatt: wenn X ein kompakt erzeugter schwach Hausdorff-Raum und (X, A) eine Kofaserung in der Kategorie $\mathcal{kwH}$ ist, dann ist $A \subseteq X$ eine k-abgeschlossene Teilmenge.

Aufgabe 5. Es sei $X \in \mathcal{kwH}$, und es sei $X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X$ eine aufsteigende Folge von Unterräumen in $\mathcal{kwH}$, so dass $X \cong \varinjlim X_n$ Außerdem sei K kompakt und $f \colon K \to X$ stetig.

(*i*) Zeigen Sie, dass $\operatorname{im}(f) \subseteq X_n$ für ein hinreichend großes n.

(*ii*) Folgern Sie für $x_0 \in X_0$, dass $\pi_k(X, x_0) = \varinjlim \pi_k(X_k, x_0)$.

Hinweis. Beweisen Sie zunächst folgende Aussage: es sei $(x_n)_n$ eine Folge in X, so dass $x_n \in X \setminus X_{n-1}$, dann ist $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$ abgeschlossen.

Aufgabe 6. Es bezeichne $|\cdot| \colon \mathcal{Top} \to \mathcal{Set}$ den vergesslichen Funktor, der einem topologischen Raum die zugrundeliegende Menge zuordnet.

(i) Geben Sie je einen links- und einen rechtsadjungierten Funktor zu $|\cdot|$ an.

(ii) Gibt es links- und rechtsadjungierte Funktoren zur Einschränkung $|\cdot|\colon \mathcal{kwH} \to \mathcal{Set}$?

Hinweis zu (ii). Welche Auswirkungen hat die Existenz der jeweiligen Adjungierten nach Lemma 4.14 auf Pullbacks und Pushouts?

Aufgabe 7. Es bezeichne $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \bigvee_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{S}^1$ den Quotienten topologischer Räume. Bestimmen Sie den Kolimes der Folge

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 1} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 3} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow \cdots$$

zum einen in der Kategorie $\mathcal{Top}$, zum anderen in der Kategorie $\mathcal{kwH}$.

Aufgabe 8. Wir betrachten den inversen Limes X der Folge

$$\mathbb{S}^1 \xleftarrow{\cdot 1} \mathbb{S}^1 \xleftarrow{\cdot 2} \mathbb{S}^1 \xleftarrow{\cdot 3} \mathbb{S}^1 \longleftarrow \cdots$$

topologischer Räume. Bestimmen Sie eine Abbildung der universellen Überlagerung $\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ des ersten Raumes in den Limes X. Ist diese Einbettung surjektiv?