Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra I“ im Wintersemester 2002/03 bei Prof. V. Bangert

Blatt 2 — 24. Oktober 2002

---

1. (a) Führen Sie den zweiten Teil des Beweises von Satz (1.16), d. h., zeigen Sie: Ist $\overline{x} = (\overline{x}_1, \dots \overline{x}_n)$ eine Lösung des linearen Gleichungssystems I, so gilt

$$\{\overline{x} + x \mid x \in L_{I^{\mathrm{hom}}}\} \subseteq L_I.$$

   (b) Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$I \qquad \begin{array}{rcr} x_1 - x_2 + \ \ x_3 & = & -1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 & = & 1 \end{array}$$

   Bestimmen Sie die Lösungsmenge von I und die des homogenen Systems I^{hom}. Illustrieren Sie Satz (1.16) an diesem Beispiel, indem Sie L_I und $L_{I^{\mathrm{hom}}}$ in einem dreidimensionalen Koordinatensystem skizzieren.

2. Beweisen Sie die „Rechenregeln“ (1.20) (c), (d) und (e):
   Sei $f\colon M \to N$ eine Abbildung und $A, B \subseteq M$, $C, D \subseteq N$. Dann gilt:

   (c) $f(M \setminus A) \supseteq f(M) \setminus f(A)$
   (d) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$
   (e) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

   Geben Sie ein Beispiel an, das zeigt, dass in (c) nicht Gleichheit zu gelten braucht, d. h., geben Sie Mengen M und N, eine Abbildung $f\colon M \to N$ und Teilmengen $A \subseteq M$, $B \subseteq N$ an, so dass $f(M \setminus A) \neq f(M) \setminus f(A)$ ist.

3. Es seien M und N nichtleere Mengen und $f\colon M \to N$. Zeigen Sie

   (a) f ist injektiv $\Leftrightarrow$ Es gibt $g\colon N \to M$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_M$
   (b) Existiert eine Abbildung $g\colon N \to M$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_N$, so ist f surjektiv.

4. Es seien M und N Mengen und $R \subseteq M \times N$ eine Relation. Die Projektion auf die erste Koordinate, $p_1\colon M \times N \to M$, ist definiert durch $p_1(x, y) = x$ für alle $(x, y) \in M \times N$ (vgl. Beispiel (f) nach Definition (1.17)).

   Zeigen Sie, dass folgende drei Aussagen äquivalent sind:

   (i) Die Einschränkung $p_1|R\colon R \to M$ von p_1 auf R ist bijektiv.
   (ii) Für jedes $x \in M$ existiert genau ein $y \in N$, so dass $(x, y) \in R$.
   (iii) Es existiert eine Funktion $f\colon M \to N$ mit $\mathrm{graph}(f) = R$.

Abgabe: Donnerstag, 31. Oktober vor der Vorlesung
Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt
Internet: `http://web.mathematik.uni-freiburg.de/mi/geometrie/la1/`