Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra I“
im Wintersemester 2002/03 bei Prof. V. Bangert

Blatt 3 31. Oktober 2002

1. Sei $f\colon M \to N$ eine Abbildung. Zeigen Sie:
   (a) Ist f injektiv, so gilt für alle Teilmengen A und B von M:
      (i) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$,
      (ii) $f(M \setminus A) = f(M) \setminus f(A)$.
   (b) Gilt (i) oder (ii) für alle Teilmengen A und B von M, so ist f injektiv.

2. Zeigen Sie: Die Gruppe $(S_3, \circ)$ ist nicht abelsch. D. h., finden Sie zwei Elemente von S_3, also zwei bijektive Abbildungen f und g der Menge $\{1, 2, 3\}$ auf sich („Permutationen“), so dass $f \circ g \neq g \circ f$.

   Schließen Sie daraus, dass die Gruppe $(S_M, \circ)$ nicht abelsch ist, wenn die Menge M mindestens drei Elemente enthält.

3. Wir wollen wie folgt eine Verknüpfung $\cdot\colon \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ definieren:

   Sind $a, b \in \mathbb{Z}_p$ so gibt es $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $a = [m]_p$ und $b = [n]_p$. Wir setzen $a \cdot b := [m \cdot n]_p$.

   Zeigen Sie, dass die Definition von $a \cdot b$ nicht davon abhängt, welche Repräsentanten m und n man für a und b gewählt hat. (Sie müssen also zeigen: Sind m' und $n' \in \mathbb{Z}$ mit $a = [m]_p = [m']_p$ und $b = [n]_p = [n']_p$, so ist $[m \cdot n]_p = [m' \cdot n']_p$.)

4. Sei $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ eine Relation auf $\mathbb{R}$. Wenn Sie sich R als Teilmenge der Koordinatenebene $\mathbb{R}^2$ vorstellen, dann entsprechen der Reflexivität und der Symmetrie von R einfache geometrische Eigenschaften von R, vgl. Vorlesung. Die Transitivität von R hat keine einfache geometrische Interpretation. Diese Aufgabe beleuchtet diese Fragestellung, falls R schon als reflexiv und symmetrisch vorausgesetzt ist.
   (a) Sei $\mathcal{M}$ die Zerlegung von $\mathbb{R}$, die aus den Intervallen $I_n = \{x \in \mathbb{R} \mid n \leq x < n+1\}$ für $n \in \mathbb{Z}$ besteht, d. h. $\mathcal{M} = \{I_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, und $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ die Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$ mit den Äquivalenzklassen I_n, $n \in \mathbb{Z}$.
   Zeichnen Sie R in ein Koordinatensystem des $\mathbb{R}^2$ ein.
   (b) Sei $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ eine reflexive und symmetrische Relation auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie:
   Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt
   $$[x]_R = p_2\big(R \cap (\{x\} \times \mathbb{R})\big)$$
   (wobei $p_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Projektion auf die y-Achse ist).
   Begründen Sie: R ist genau dann eine Äquivalenzrelation, wenn für alle $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}$ die Projektionen von $R \cap (\{x\} \times \mathbb{R})$ und von $R \cap (\{\tilde{x}\} \times \mathbb{R})$ auf die y-Achse entweder disjunkt oder gleich sind.
   (c) Finden Sie eine Relation R auf $\mathbb{R}$, die reflexiv und symmetrisch, aber nicht transitiv ist.

Abgabe: Donnerstag, 7. November in der Vorlesung
Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt
Internet: `http://web.mathematik.uni-freiburg.de/mi/geometrie/la1/`