Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra I“ im Wintersemester 2002/03 bei Prof. V. Bangert

Blatt 4 7. November 2002

1. (a) Seien $m \geq 2$ und $n \geq 1$ natürliche Zahlen und $p = mn$. Sei $a = [n]_p \in \mathbb{Z}_p$. Zeigen Sie:

$$\underbrace{a + \cdots + a}_{m\text{-mal}} = 0$$

(wobei 0 ($= [0]_p$) hier das neutrale Element von $\mathbb{Z}_p$ bezüglich der Addition bezeichnet).

(b) Sei $(G, \top)$ eine Gruppe und $a, b \in G$. Zeigen Sie:
Es existiert genau eine Lösung $x \in G$ der Gleichung $a \top x = b$ und genau eine Lösung $y \in G$ der Gleichung $y \top a = b$.

2. Sei $(G, \top)$ eine Gruppe. Für $a \in G$ sei die Abbildung $f_a\colon G \to G$ definiert durch $f_a(x) = a \top x$ für alle $x \in G$. Zeigen Sie:

Die Abbildung f_a ist bijektiv (also $f_a \in S_G$). Es gilt

$$f_a = \mathrm{id}_G \iff a = e$$

und für alle $a, b \in G$ ist $f_a \circ f_b = f_{a \top b}$.

3. (a) Zeigen Sie, dass $G := \{1, -1, i, -i\} \subseteq \mathbb{C}$, mit der Multiplikation von komplexen Zahlen als Verknüpfung, eine abelsche Gruppe bildet.
Stellen Sie die Verknüpfungstafel von G auf.

(b) Sei $t \in \mathbb{Q}$, $t > 0$. Zeigen Sie:
$K := \left\{ r + i\, s\sqrt{t} \;\middle|\; r, s \in \mathbb{Q} \right\} \subseteq \mathbb{C}$, versehen mit der Addition und Multiplikation von komplexen Zahlen, ist ein Körper.

4. Zeigen Sie das Assoziativgesetz für die in der Vorlesung definierte Multiplikation von komplexen Zahlen.

Abgabe: Donnerstag, 14. November in der Vorlesung
Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt
Internet: `http://web.mathematik.uni-freiburg.de/mi/geometrie/la1/`