Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra I“
im Wintersemester 2002/03 bei Prof. V. Bangert

Blatt 6 — 21. November 2002

---

1. Sei $(G, \top)$ eine Gruppe. Eine Teilmenge H von G heißt *Untergruppe* von G, falls $H \neq \emptyset$ und für alle $a, b \in H$ gilt: $a \top b^{-1} \in H$.

   Zeigen Sie:

   (a) Ist H eine Untergruppe von G, so ist H mit der von $G \times G$ auf $H \times H$ eingeschränkten Verknüpfung $\top$ eine Gruppe.

   (b) Ist $\mathcal{H}$ eine Menge von Untergruppen von G, so ist $\bigcap_{H \in \mathcal{H}} H$ eine Untergruppe von G.
   (Zur Erinnerung: $\bigcap_{H \in \mathcal{H}} H = \{g \mid \forall H \in \mathcal{H} \colon g \in H\}$.)

2. Seien u, v, w linear unabhängige Vektoren in einem $\mathbb{R}$-Vektorraum. Zeigen Sie:

   (a) Die Vektoren $u + v - 2w$, $u - v - w$, $u + w$ sind linear unabhängig.

   (b) Die Vektoren $u + v - 3w$, $u + 3v - w$, $v + w$ sind linear abhängig.

3. (a) Sind die Vektoren $v_1 = (1, 1, 2, 1)$, $v_2 = (2, 1, 3, 2)$, $v_3 = (2, 0, 0, 1)$, $v_4 = (2, 1, 1, 1)$ im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{Q}^4$ linear unabhängig?

   (b) Bestimmen Sie eine Basis von $\operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

4. Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \{f \mid f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$.

   (a) Zeigen Sie: Die Funktionen $f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^2$, und $f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = e^x$, sind linear unabhängig.

   (b) Für $a \in \mathbb{R}$ sei $g_a \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $g_a(a) = 1$, und $g_a(x) = 0$, falls $x \neq a$.
   Zeigen Sie: Die Menge $M := \{g_a \mid a \in \mathbb{R}\} \subseteq V$ ist linear unabhängig.

   (c) Zeigen Sie: $\operatorname{span}(M)$ ist die Menge aller $f \in V$, für die die Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$ endlich ist.

Abgabe: Donnerstag, 28. November in der Vorlesung
Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt
Internet: `http://web.mathematik.uni-freiburg.de/mi/geometrie/la1/`