Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra I“
im Wintersemester 2002/03 bei Prof. V. Bangert

Blatt 8 — 5. Dezember 2002

1. Stellen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$I \qquad \begin{aligned} x+y-z-w&=1\\ x-y+z+w&=3 \end{aligned}$$

als affinen Unterraum dar (d. h., bestimmen Sie eine Lösung (x_0, y_0, z_0, w_0) von I und eine linear unabhängige Menge $B \subseteq \mathbb{R}^4$, so dass $L_I = (x_0, y_0, z_0, w_0) + \operatorname{span} B$.)

2. Seien $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^4$ gegeben durch $U_1 = \operatorname{span}\big\{(1,-1,2,1),(1,2,1,1),(1,0,2,0)\big\}$ und $U_2 = \operatorname{span}\big\{(2,-3,5,0),(1,0,0,0)\big\}$.

   Bestimmen Sie $\dim U_1$, $\dim U_2$ und $\dim(U_1+U_2)$ und errechnen Sie daraus $\dim(U_1 \cap U_2)$.

3. Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Eine Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *gerade*, falls für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $g(x) = g(-x)$. Eine Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *ungerade*, falls für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $h(x) = -h(-x)$.

   Zeigen Sie:

   (a) Die Menge G der geraden Funktionen und die Menge U der ungeraden Funktionen sind Unterräume von V.

   (b) Es gilt $G \oplus U = V$.

   Hinweis: Machen Sie für eine Funktion f den Ansatz $f = g + h$ mit unbekannten Funktionen $g \in G$ und $h \in U$, setzen Sie in diese Gleichung einmal x und einmal $-x$ ein und bestimmen Sie so g und h.

4. (a) Sei V ein Vektorraum, U_0 und U_1 Unterräume von V und $v_0, v_1 \in V$. Zeigen Sie:

$$v_0 + U_0 = v_1 + U_1 \iff U_0 = U_1 \text{ und } v_1 - v_0 \in U_0$$

   (b) Seien U_0, U_1 zweidimensionale Unterräume des $\mathbb{R}^4$ mit $U_0 \cap U_1 = \{0\}$ und seien $v_0, v_1 \in \mathbb{R}^4$. Zeigen Sie:

   Die affinen Ebenen $v_0 + U_0$ und $v_1 + U_1$ besitzen genau einen Schnittpunkt.

Abgabe: Donnerstag, 12. Dezember in der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Internet: `http://web.mathematik.uni-freiburg.de/mi/geometrie/la1/`