Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra I“
im Wintersemester 2002/03 bei Prof. V. Bangert

Blatt 9 12. Dezember 2002

1. (a) Seien $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$, und sei $L\colon K^n \to K^m$, $L(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_m)$. Zeigen Sie, dass L linear ist, und bestimmen Sie $\ker L$ und $\operatorname{im} L$.

   (b) Seien $a_1, \ldots, a_n \in K$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $L\colon K^n \to K$, definiert durch $L(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$, linear ist.

   Zeigen Sie: Ist $L\colon K^n \to K$ linear, so existieren $a_1, \ldots, a_n \in K$, so dass für alle $(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ gilt: $L(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \ldots, +a_nx_n$.

2. Für $n \in \mathbb{N}$ sei P_n der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynomfunktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad $\leq n$, vgl. Blatt 5, Aufgabe 4. Welche der folgenden Abbildungen sind linear? Bestimmen Sie für diese den Kern und das Bild.

   (a) $F_1\colon P_n \to P_{n+1}$, $F_1(f) = \tilde{f}$ mit $\tilde{f}(x) = xf(x) + 1$

   (b) $F_2\colon P_n \to P_n$, $F_2(f) = \tilde{f}$ mit $\tilde{f}(x) = f(x) - f(0)$

   (c) $F_3\colon P_n \to P_n$, $F_3(f) = \tilde{f}$ mit $\tilde{f}(x) = f(x-1)$

   (d) $F_4\colon P_n \to P_{n-1}$, definiert durch:
   Ist $f(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0$, so ist $F_4(f)(x) = na_nx^{n-1} + \cdots + a_1$.

3. Sei $L \in \operatorname{Hom}(V, W)$ und $M \subseteq V$. Zeigen Sie: $L(\operatorname{span} M) = \operatorname{span} L(M)$.

4. (a) Seien V, W, Z K-Vektorräume, $L_1 \in \operatorname{Hom}(V, W)$, $L_2 \in \operatorname{Hom}(W, Z)$. Zeigen Sie: $L_2 \circ L_1 \in \operatorname{Hom}(V, Z)$.

   (b) Zeigen Sie: Ist $L\colon V \to W$ ein Isomorphismus, so ist auch $L^{-1}\colon W \to V$ ein Isomorphismus.

5. Diese Aufgabe ist besonders für Studierende der Mathematik und der Physik gedacht. Die erzielten Punkte sind Bonuspunkte.

   Sei $V = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sei $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $L\colon V \to V$ die Abbildung $L(f) = f'' + \omega^2 f$. Zeigen Sie:

   (a) L ist linear.

   (b) Die Funktionen $x \mapsto \cos(\omega x)$ und $x \mapsto \sin(\omega x)$ liegen in $\ker L$.

   (c) Ist $f \in \ker L$, so ist die Funktion $\omega^2 f^2 + (f')^2$ konstant.
   Anleitung: Differenzieren Sie.

   (d) $\ker L = \{f \mid \exists a, b \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\colon f(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)\}$.
   Anleitung: Ist $f \in \ker L$, so wenden Sie Teil (c) auf die durch $g(x) := f(x) - \big(f(0)\cos(\omega x) + \frac{f'(0)}{\omega}\sin(\omega x)\big)$ definierte Funktion $g \in \ker L$ an.

Abgabe: Donnerstag, 19. Dezember in der Vorlesung
Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt
Internet: `http://web.mathematik.uni-freiburg.de/mi/geometrie/la1/`