Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra I“ im Wintersemester 2002/03 bei Prof. V. Bangert

Blatt 10 19. Dezember 2002

---

1. Mit $\mathcal{G}_n$ sei die geordnete Basis $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$ des Raums P_n der Polynomfunktionen vom Grad $\leq n$ bezeichnet (vgl. Blatt 5, Aufgabe 4) und $D \in \operatorname{Hom}(P_n, P_{n-1})$ sei die Abbildung, die einer Polynomfunktion $p \in P_n$ ihre Ableitung $D(p) := p'$ zuordnet.

   Bestimmen Sie die Matrix $\operatorname{Mat}_{\mathcal{G}_n}^{\mathcal{G}_{n-1}}(D)$ von D bzgl. $\mathcal{G}_n$ und $\mathcal{G}_{n-1}$.

2. Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $\mathcal{G} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine geordnete Basis von V. Zeigen Sie:

   Der Isomorphismus $L\colon V \to K^n$ mit $L(v_i) = e_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ ist gegeben durch

$$L(v) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \iff v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i.$$

3. (a) Entscheiden Sie, in welcher Reihenfolge die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   multipliziert werden können und berechnen Sie das Produkt.

   (b) Berechnen Sie für die (3×3)-Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

   die Produkte AB und BA und den *Kommutator* $[A, B] := AB - BA$.

4. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ heißt *magisches Quadrat*, wenn für jede Zeile, jede Spalte und beide Diagonalen die Summer ihrer Einträge dieselbe Zahl s_A ergibt.

   Sei $M := \{A \in \mathbb{R}^{3\times3} \mid A \text{ ist magisches Quadrat}\}$.

   (a) Zeigen Sie, dass M ein Unterraum von $\mathbb{R}^{3\times3}$ ist.

   (b) Bestimmen Sie eine Basis von M.

   Hinweis: Zeigen Sie: Ist $A = (a_{ij})$ ein magisches Quadrat, so gilt für den „mittleren“ Matrixeintrag a_{22} die Beziehung $3a_{22} = s_A$. Drücken Sie die Bedingungen an A durch ein homogenes lineares Gleichungssystem aus.

Abgabe: Donnerstag, 9. Januar in der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Internet: `http://web.mathematik.uni-freiburg.de/mi/geometrie/la1/`