Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra I“ im Wintersemester 2002/03 bei Prof. V. Bangert

Blatt 11 — 9. Januar 2003

---

1. (a) Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in Gl_2(K)$. Zeigen Sie:

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ sind linear abhängig } \iff x_2 = 0.$$

   (b) Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$ mit $b \neq 0$. Zeigen Sie: Für alle $\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ sind

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

   linear unabhängig.

   Hinweis: Anwesenheitsaufgabe 2, Blatt 6

2. Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

   (a) Berechnen Sie A^n für $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Die lineare Abbildung $L \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ mit $\mathrm{Mat}(L) = A$ nennt man eine *Scherung*. Skizzieren Sie das Quadrat $Q = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq 1,\ 0 \leq x_2 \leq 1\}$ und die Bildmengen $L(Q)$ und $L^2(Q)$.

3. Sei $A \in K^{n\times n}$ und es gelte $AB = BA$ für alle $B \in K^{n\times n}$. Zeigen Sie: Es existiert ein $a \in K$, so dass $A = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix}$ ist.

   Hinweis: Wenden Sie die Voraussetzung an auf die Basismatrizen $B = E_{ij}$ (vgl. (4.13)).

4. Sei $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in K^{n\times n}$ eine *obere Dreiecksmatrix*, d. h. für alle Paare (i, j) mit $i > j$ gilt $a_{ij} = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

   Zeigen Sie: Gilt für alle $i \in \{1, \dots, n\}$: $a_{ii} \neq 0$, so ist $A \in Gl_n(K)$.

   Anleitung: Zeigen Sie, dass das homogene lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ nur die Lösung $x = 0 \in K^{n\times 1}$ besitzt, und verwenden Sie dann (4.8).

   Zusatz: Gilt auch die Umkehrung?

Abgabe: Donnerstag, 16. Januar in der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Internet: `http://web.mathematik.uni-freiburg.de/mi/geometrie/la1/`