Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra I“ im Wintersemester 2002/03 bei Prof. V. Bangert

Blatt 12 16. Januar 2003

---

1. Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ 3 & 10 & -5 & -4 \end{pmatrix}$. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ nach dem Gaußschen Algorithmus in Matrizenschreibweise gemäß (4.25) und bestimmen Sie den Rang von A.

2. Berechnen Sie nach dem Gaußschen Algorithmus gemäß (4.26) die Inverse der Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. (a) Seien V, W, Z endlich-dimensionale Vektorräume, $L \in \mathrm{Hom}(V, W)$, $J \in \mathrm{Hom}(W, Z)$. Zeigen Sie:
$$\dim\big(\mathrm{im}(J \circ L)\big) \leq \min\big\{\dim\big(\mathrm{im}(J)\big), \dim\big(\mathrm{im}(L)\big)\big\}.$$
   (b) Seien $A \in K^{k\times m}$, $B \in K^{m\times n}$. Zeigen Sie mit Hilfe von (a):
$$\mathrm{rg}(AB) \leq \min\big\{\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B)\big\}.$$

4. Für die Matrix $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in K^{n\times n}$ gelte $a_{ij} = 0$ für alle (i, j) mit $j \leq i$. (A ist also eine obere Dreiecksmatrix wie in Blatt 11, Aufgabe 4 definiert, die zusätzlich noch $a_{11} = \cdots = a_{nn} = 0$ erfüllt.)

   Für $k \in \mathbb{N}$ ist die k-te Potenz A^k von A definiert durch $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k\text{-mal}}$.

   Mit $0 \in K^{n\times n}$ werde die Nullmatrix, deren Einträge alle gleich $0 \in K$ sind, bezeichnet.

   Zeigen Sie: $A^n = 0$.

   Anleitung: Zeigen Sie per Induktion für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$: Ist $A^k = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, so ist $b_{ij} = 0$ für alle (i, j) mit $j \leq i + k - 1$.

Abgabe: Donnerstag, 23. Januar in der Vorlesung
Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt
Internet: `http://web.mathematik.uni-freiburg.de/mi/geometrie/la1/`