Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra I“
im Wintersemester 2002/03 bei Prof. V. Bangert

Blatt 14 — 30. Januar 2003

---

1. (a) Berechnen Sie

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

   (b) Berechnen Sie das Volumen $\mathrm{vol}_{D_0}(P)$ des Parallelotops $P = P(v_1, v_2, v_3, v_4) \subseteq \mathbb{R}^4$ mit $v_1 = (2, 1, 1, -1)$, $v_2 = (1, 0, 1, -1)$, $v_3 = (0, 0, 1, 2)$, $v_4 = (1, 2, 3, 4)$.

2. Sei $L \in \operatorname{End} \mathbb{R}^2$ der Endomorphismus von $\mathbb{R}^2$ mit der Matrix $\operatorname{Mat}(L) = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.

   (a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von L und alle zugehörigen Eigenvektoren.

   (b) Geben Sie eine geordnete Basis $\mathcal{G}$ von $\mathbb{R}^2$ an, die aus Eigenvektoren von L besteht, und die Matrix $\operatorname{Mat}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{G}}(L)$ von L bezüglich $\mathcal{G}$.

3. Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum P_n der Polynome vom Grad $\leq n$ und den Endomorphismus $L\colon P_n \to P_n$, gegeben durch $L(p)(x) = p(x-1)$.

   Berechnen Sie $\det L$.

   Hinweis: Zeigen Sie, dass die Matrix von L bezüglich der Standardbasis $(1, x, \ldots, x^n)$ eine obere Dreiecksmatrix ist, und verwenden Sie Aufgabe 4 von Blatt 11.

4. (a) Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gelte $AA^T = E_n$. Zeigen Sie: $|\det A| = 1$.

   (b) Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ heißt *schiefsymmetrisch*, wenn $A^T = -A$.
   Sei K ein Körper mit $1 + 1 \neq 0$, sei n ungerade und sei $A \in K^{n\times n}$ schiefsymmetrisch.
   Zeigen Sie: $\det A = 0$.

   (c) Der Matrix $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in K^{n\times n}$ werde die Matrix $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in K^{n\times n}$ mit $\tilde{a}_{ij} := (-1)^{i+j} a_{ij}$ zugeordnet.
   Zeigen Sie: $\det \tilde{A} = \det A$.

Abgabe: Donnerstag, 6. Februar in der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Internet: `http://web.mathematik.uni-freiburg.de/mi/geometrie/la1/`