Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra I“ im Wintersemester 2002/03 bei Prof. V. Bangert

Blatt 15 6. Februar 2003

1. Bestimmen Sie, ob die Basis $\big((1,1,1),(-1,1,2),(3,2,2)\big)$ des $\mathbb{R}^3$ positiv oder negativ orientiert ist.

2. Gegeben seien $x_0,\dots,x_n \in \mathbb{R}$ und $b_0,\dots,b_n \in \mathbb{R}$. Gesucht ist ein reelles Polynom $p(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ vom Grad $\le n$ für das $p(x_i) = b_i$ für $0 \le i \le n$ gilt.

   Zeigen Sie: Es gibt genau ein solches Polynom, falls

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} \neq 0\,.$$

   Bemerkung: Diese Determinante heißt *Vandermondesche Determinante* und hat den Wert $\prod\limits_{1\le i<j\le n} (x_j - x_i)$. Sie finden die Berechnung z. B. in Beutelsbacher, Seite 193.

3. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion und Entwicklung nach der letzten Spalte: Für

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   gilt $\det(A + xE_n) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$.

4. Zu einer symmetrischen Bilinearform $B\colon V \times V \to \mathbb{R}$ heißt $q_B\colon V \to \mathbb{R}$, $q_B(v) := B(v,v)$, die *zugehörige quadratische Form.*

   Zeigen Sie: Für alle $v, w \in V$ gilt $B(v,w) = \frac{1}{2}\big(q_B(v+w) - q_B(v) - q_B(w)\big)$.

   (D. h., wenn man q_B kennt, so kann man daraus B zurückgewinnen.)

Abgabe: Donnerstag, 13. Februar in der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Internet: `http://web.mathematik.uni-freiburg.de/mi/geometrie/la1/`