Anwesenheitsaufgaben zur „Linearen Algebra I“ im Wintersemester 2002/03 bei Prof. V. Bangert

Blatt 2 — 28.–30. Oktober 2002

1. Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$I \qquad \begin{array}{rcll} x+y+z &=& 1 & \quad I_1 \\ x-y+z &=& 0 & \quad I_2 \\ x+y-z &=& 0 & \quad I_3 \end{array}$$

   und das lineare Gleichungssystem II mit den Zeilen

$$II_1 = I_1, \quad II_2 = I_1 + I_2 + I_3, \quad II_3 = I_2 + I_3.$$

   Zeigen Sie: $L_I \subseteq L_{II}$, aber $L_I \neq L_{II}$. Diskutieren Sie, woran es liegt, dass sich die Lösungsmenge beim Übergang von I zu II ändert.

2. Beweisen Sie eine der „Rechenregeln“ (1.20) (a) und (b):

   Sei $f\colon M \to N$ eine Abbildung und $A, B \subseteq M$. Dann gilt:

   (a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

   (b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

3. Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl und seien $A_1, \ldots, A_n$ Mengen. Sei $A := A_1 \cup \cdots \cup A_n$ und sei B die Menge aller Abbildungen $f\colon \{1, \ldots, n\} \to A$ mit $f(i) \in A_i$ für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$.

   Für $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A_1 \times \cdots \times A_n$ sei $G(a) \in B$ die Abbildung $G(a)\colon \{1, \ldots, n\} \to A$, die gegeben ist durch $G(a)(i) = a_i$.

   Machen Sie sich klar, was die Definition bedeutet, und dass hierdurch eine Abbildung $G\colon A_1 \times \cdots \times A_n \to B$ definiert wird.

   Zeigen Sie, dass G bijektiv ist.