Anwesenheitsaufgaben zur „Linearen Algebra I“
im Wintersemester 2002/03 bei Prof. V. Bangert

Blatt 4 — 11.–13. November 2002

---

1. Sei K ein Körper und $a \in K$. Zeigen Sie:

$$-a = (-1)\,a$$

2. Sei $t \in \mathbb{Q}$ mit $t > 0$ und $\sqrt{t} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und

$$K := \left\{ r + s\sqrt{t} \;\middle|\; r, s \in \mathbb{Q} \right\} \subseteq \mathbb{R}\,.$$

   Zeigen Sie: K, versehen mit der üblichen Addition und Multiplikation, ist ein Körper.

   Hinweis: Sie müssen insbesondere zeigen, dass die Einschränkung von Addition und Multiplikation auf K eine innere Verknüpfung auf K ist, d. h., dass für alle $a, b \in K$ die Summe $a + b$ und das Produkt ab wieder Elemente von K sind.

3. Sei $z = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{C}$.

   Zeigen Sie: $z^3 = -1$ und $z^6 = 1$, und berechnen Sie z^2, z^4 und z^5.

   Benutzen Sie dies, um zu zeigen, dass $G := \{1, z, z^2, z^3, z^4, z^5\}$ mit der Multiplikation von komplexen Zahlen eine abelsche Gruppe bildet.

   Zeichnen Sie $z, z^2, \dots, z^6$ in ein Koordinatensystem ein.