Anwesenheitsaufgaben zur „Linearen Algebra I“ im Wintersemester 2002/03 bei Prof. V. Bangert

Blatt 11 — 13.–15. Januar 2003

1. Sei $\mathcal{G} = (v_1, \dots, v_n)$ eine geordnete Basis von V, $L \in \mathrm{End}(V)$ und $A = \mathrm{Mat}^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}(L)$. Zeigen Sie:

   A ist genau dann ähnlich zu einer Diagonalmatrix
   $$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix},$$
   wenn eine geordnete Basis $\overline{\mathcal{G}} = (\overline{v}_1, \dots, \overline{v}_n)$ von V existiert, so dass $L(\overline{v}_i) = d_i \overline{v}_i$ für $i = 1, \dots, n$.

2. Sei V ein K-Vektorraum mit Basis (v_1, v_2). Seien $L_1, L_2 \in \mathrm{End}(V)$ definiert durch $L_1(v_1) = v_1$, $L_1(v_2) = 0$ und $L_2(v_1) = 0$, $L_2(v_2) = v_2$, vgl. Satz (4.6).

   (a) Zeigen Sie:
   $$L_1 \circ L_2 = L_2 \circ L_1 = 0$$
   Hier bezeichnet 0 ($\in \mathrm{End}(V)$) die 0-Abbildung, die jeden Vektor $v \in V$ auf $\underline{0} \in V$ abbildet.

   (b) Finden Sie mittels (a) Matrizen $A_1, A_2 \in K^{2\times 2} \setminus \{0\}$, so dass
   $$A_1 A_2 = A_2 A_1 = 0 \ (\in K^{2\times 2})$$
   ist.

   (c) Finden Sie Matrizen $A, B \in K^{2\times 2} \setminus \{0\}$, so dass $AB = 0$ aber $BA \neq 0$ ist.