Anwesenheitsaufgaben zur „Linearen Algebra I“ im Wintersemester 2002/03 bei Prof. V. Bangert

Blatt 14 — 3.–5. Februar 2003

1. (a) Berechnen Sie
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

   (b) Berechnen Sie das Volumen $\mathrm{vol}_{D_0}(P)$ des Parallelotops $P = P(v_1, v_2, v_3) \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (1,1,1)$, $v_3 = (-1,1,2)$.

2. Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum P_n der Polynome vom Grad $\leq n$ und den Endomorphismus $L\colon P_n \to P_n$, gegeben durch $L(p)(x) = p(-x)$.

   Berechnen Sie $\det L$.

   Hinweis: Bestimmen Sie die Matrix von L bezüglich der Standardbasis $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$.

3. Sei K ein Körper, in dem $1 + 1 \neq 0$ gilt.

   Eine quadratische Matrix $A \in K^{n \times n}$ heißt *symmetrisch*, falls $A^T = A$. Sie heißt *schiefsymmetrisch*, falls $A^T = -A$.

   Sei $U_+ \subseteq K^{n \times n}$ die Menge der symmetrischen $(n \times n)$-Matrizen und $U_- \subseteq K^{n \times n}$ die Menge der schiefsymmetrischen.

   Machen Sie sich klar, dass U_- und U_+ Unterräume des K-Vektorraums $K^{n \times n}$ sind, und zeigen Sie, dass
$$K^{n \times n} = U_- \oplus U_+ \,.$$

   Berechnen Sie $\dim U_-$ und $\dim U_+$.