Klausur „Lineare Algebra I“ WS 2002/03
Montag, 17. Februar 2003

mit Lösungsvorschlägen

Aufgabe 1

Welche der folgenden Aussagen ist wahr, welche falsch? Begründen Sie kurz oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

„Sind $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$ Abbildungen und ist f injektiv und g surjektiv, so ist die Abbildung $g \circ f\colon A \to C$

a) bijektiv.“ (1 Punkt)

> *Falsch, da $g \circ f$ weder injektiv noch surjektiv zu sein braucht, siehe b), c)*

b) surjektiv.“ (1 Punkt)

> *Falsch. Beispiel:*
> $A = \{1\}$, $B = C = \{1, 2\}$, $f(1) = 1$, $g(1) = 1, g(2) = 2$.

c) injektiv.“ (1 Punkt)

> *Falsch. Beispiel:*
> $A = B = \{1, 2\}$, $C = \{1\}$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $g(1) = g(2) = 1$.

Aufgabe 2

Seien U_1, U_2 zweidimensionale Untervektorräume des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^4$.

a) Welche natürlichen Zahlen können als $\dim(U_1 \cap U_2)$ auftreten? (Ohne Begründung) (1 Punkt)

> $0, 1, 2$

b) Welche dieser Zahlen tritt in den „meisten“ Fällen auf? (Ohne Begründung) (1 Punkt)

> 0

Aufgabe 3

Welche der folgenden Mengen von Vektoren des $\mathbb{R}^3$ sind Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$? Geben Sie eine kurze Begründung.

a) $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0\}$ (1 Punkt)

Ja. Lösungsmenge eines homogenen LGS.

b) $M_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 = x_2^2\}$ (1 Punkt)

Nein. Nicht abgeschlossen unter Addition: $a = (1, 1, 0) \in M_2$, $b = (1, -1, 0) \in M_2$, *aber* $a + b = (2, 0, 0) \notin M_2$.

c) $M_3 = \{(0, 0, 0)\}$ (1 Punkt)

Ja. Das ist der triviale Unterraum.

d) Es sei $L \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ und $M_4 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid L(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0)\}$. (1 Punkt)

Nein. Da $L\big((0, 0, 0)\big) = (0, 0, 0) \neq (1, 0, 0)$, *ist* $(0, 0, 0) \notin M_4$.

e) $M_5 = \{(1, 1, 1)\}$ (1 Punkt)

Nein, da $(0, 0, 0) \notin M_5$.

Aufgabe 4

Geben Sie eine endliche Menge M von Vektoren des $\mathbb{R}^3$ an mit $\mathrm{span}(M) = \mathbb{R}^3$, die keine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist. (2 Punkte)

$M = \{e_1, e_2, e_3, e_1 + e_2\}$.

Aufgabe 5

Welche natürlichen Zahlen können als Dimension des Bildes im $L = L(\mathbb{R}^4)$ eines $\mathbb{R}$-Vektorraumhomomorphismus $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^7$ auftreten? (Ohne Begründung) (1 Punkt)

$0, 1, 2, 3, 4$

Aufgabe 6 Sei $n \geq 2$.

Welche der folgenden Aussagen ist wahr, welche falsch? Begründen Sie kurz oder geben Sie ein Gegenbeispiel.

„Für alle $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

a) $\det(\alpha A) = \alpha \det A$.“ (1 Punkt)

Falsch. Gegenbeispiel:
$n = 2,\ \alpha = 2,\ A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. $\det(2A) = 4 \neq 2 = 2\det A$.

b) $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$.“ (1 Punkt)

Wahr. Laut Vorlesung.
($\det$ *ist n-linear als Funktion der Spalten.)*

c) $\det(A + B) = \det A + \det B$“. (2 Punkte)

Falsch. Gegenbeispiel:
$n = 2,\ A = B = E_2$.
$\det A + \det B = 1 + 1 = 2,\ \det(A + B) = \left|\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right| = 4$.

Aufgabe 7

Sei $n \geq 2$, seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ und sei die symmetrische Bilinearform $b\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch $b(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i y_i$.

Welche der folgenden Aussagen ist wahr, welche falsch? Begründen Sie oder geben Sie ein Gegenbeispiel.

„b ist positiv definit, falls gilt:

a) $\lambda_i > 0$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.“ (1 Punkt)

Wahr.
$b(x,x) = \sum \lambda_i {x_i}^2 \geq 0$, *und aus* $b(x,x) = 0$ *folgt* $\sum \lambda_i {x_i}^2 = 0$, *also* $x_i = 0 \quad \forall i$, *also* $x = 0$.

b) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n > 0$.“ (1 Punkt)

Falsch. Gegenbeispiel:
$n = 2$, $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ *(*$\Rightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1 > 0$*)*, $x = e_1$
$\Rightarrow b(x,x) = -1 < 0$.

c) $\lambda_i \geq 0$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.“ (1 Punkt)

Falsch. Gegenbeispiel:
$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0 \Rightarrow b(x,x) = 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^n$.

d) es existiert ein $i \in \{1, \dots, n\}$, für das $\lambda_i > 0$ ist.“ (1 Punkt)

Falsch. Gegenbeispiel:
$n = 2$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1 > 0$, $x = e_1 \Rightarrow b(x,x) = -1$.

Aufgabe 8

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Welche der folgenden Ausdrücke sind mathematisch sinnvoll? Geben Sie eine Begründung, falls ein Ausdruck nicht sinnvoll ist. Berechnen Sie die Ausdrücke, die sinnvoll sind.

a) AB, b) BA, c) $B^T A$, d) $B^{-1}A$, e) $\det(BA)$, f) $\det(A^2)$, g) $\operatorname{rg}(A)$, h) $\operatorname{rg}(B)$.

(8 Punkte)

a) nicht sinnvoll: Zahl der Spalten von $A \neq$ *Zahl der Zeilen von* B.

b) $BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 3 \\ -1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

c) nicht sinnvoll: Zahl der Spalten von $B^T \neq$ *Zahl der Zeilen von* A.

d) nicht sinnvoll: B *nicht quadratisch* $\Rightarrow B^{-1}$ *nicht definiert.*

e) nicht sinnvoll: BA *nicht quadratisch* $\Rightarrow \det(BA)$ *nicht definiert.*

f) $\det(A^2) = \det(A)^2$.

$\det(A) \overset{\text{Sarrus}}{=} -5 + 0 - 2 - 0 + 4 + 1 = -2 \Rightarrow \det(A^2) = \det(A)^2 = 4$.

g) $\det(A) \neq 0 \Rightarrow A$ *ist regulär* $\Rightarrow \operatorname{rg}(A)$ *ist maximal, also* $\operatorname{rg}(A) = 3$.

h) B *ist in Stufenform* $\Rightarrow$ *die Zeilen sind linear unabhängig* $\Rightarrow \operatorname{rg}(B) = 2$.

Aufgabe 9

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & a & b \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $L \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ der Endomorphismus des $\mathbb{R}^3$ mit $\mathrm{Mat}(L) = A$ (d. h. L besitzt bzgl. der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ die Matrix A).

Berechnen Sie alle Eigenwerte und einen Eigenvektor von L. (8 Punkte)

$$p_L(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & a & b \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{Entwickeln}}{=} (2-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (2-\lambda)\big((3-\lambda)(-2-\lambda)+1\big) = (2-\lambda)(\lambda^2-\lambda-5)$$

Nullstellen von $p_L(\lambda)$:

$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+5} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{21}$$

Also, Eigenwerte sind: $2, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{21}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{21}$.

Eigenvektor zu $\lambda_1 = 2$:

Offensichtlich ist $L(e_1) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = 2e_1$ (erste Spalte der Matrix) $\Rightarrow e_1$ ist Eigenvektor zum Eigenwert 2.

Aufgabe 10

Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K und seien $J, L \in \operatorname{End}(V)$. Beweisen Sie:

a) $J \circ L = 0$ (0-Abbildung) $\iff$ $\operatorname{im} L \subseteq \ker J$. (4 Punkte)

„$\Rightarrow$": *Sei* $w \in \operatorname{im} L \Rightarrow \exists v \in V : w = L(v)$.
$J(w) = J(L(v)) = (J \circ L)(v) \overset{\text{Voraus.}}{=} 0 \Rightarrow w \in \ker J$.

„$\Leftarrow$": *Sei* $v \in V$. *Dann ist* $w := L(v) \in \operatorname{im} L$.
Nach Voraussetzung ist $\operatorname{im} L \subseteq \ker J$, *also* $w \in \ker J$.
Daraus folgt $0 = J(w) = J(L(v)) = (J \circ L)(v)$.
Dies gilt für alle $v \in V$, *also* $J \circ L = 0$.

b) Aus $J \circ L = 0$ folgt: $\dim(\ker J) + \dim(\ker L) \geq n$. (4 Punkte)

Aus a) folgt: $\operatorname{im} L \subseteq \ker J \Rightarrow \dim(\operatorname{im} L) \leq \dim(\ker J)$.
Dimensionsformel: $n = \dim V = \dim(\operatorname{im} L) + \dim(\ker L)$.
Zusammen folgt:
$n = \dim(\operatorname{im} L) + \dim(\ker L) \leq \dim(\ker J) + \dim(\ker L)$.