Klausur „Lineare Algebra I“ WS 2002/03
Wiederholungsklausur
Mittwoch, 23. April 2003

Aufgabe 1
Ein Mensch x heiße zu einem Menschen y *eng verwandt*, wenn eine der folgenden Aussagen richtig ist:

(i) x hat dieselben Eltern wie y.

(ii) x ist ein Kind von y.

(iii) y ist ein Kind von x.

Geben Sie für Ihre Antworten je eine kurze Begründung:
Ist die Relation „eng verwandt“ auf jeder Menge von Menschen

a) reflexiv? (1 Punkt)

b) symmetrisch? (1 Punkt)

c) transitiv? (1 Punkt)

Aufgabe 2
Es seien U_1, U_2 dreidimensionale Unterräume des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^5$.
Welche natürlichen Zahlen können als $\dim(U_1 + U_2)$ auftreten?
Geben Sie ein Beispiel für jede der Möglichkeiten. (4 Punkte)

Aufgabe 3

Welche der folgenden Ausagen sind wahr, welche falsch? Geben Sie jeweils eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel.

„Für alle endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorräume V und W und für jede lineare Abbildung $L \in \mathrm{Hom}(V, W)$ gilt:

a) Ist $\dim V < \dim W$, so ist L injektiv.“ (1 Punkt)

b) Ist $\dim V > \dim W$, so ist L nicht injektiv.“ (1 Punkt)

c) Ist L surjektiv und $\dim V = \dim W$, so ist L auch injektiv.“ (1 Punkt)

d) Ist $\dim V < \dim W$, so ist L nicht surjektiv.“ (1 Punkt)

Aufgabe 4

Sei $\sigma \in S_4$ die Permutation von $\{1, 2, 3, 4\}$ mit $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 1$, $\sigma(3) = 4$ und $\sigma(4) = 2$.

a) Berechnen Sie $\operatorname{sgn}(\sigma)$. (1 Punkt)

b) Berechnen Sie $\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. (1 Punkt)

c) Ist die geordnete Basis (e_3, e_1, e_4, e_2) des $\mathbb{R}^4$ positiv oder negativ orientiert? (Kurze Begründung!) (1 Punkt)

Aufgabe 5

Betrachten Sie den $\mathbb{R}^5$ mit dem Standardskalarprodukt. Berechnen Sie den Kosinus des Winkels φ zwischen den Vektoren $(1, 2, 3, 1, 1)$ und $(2, 0, -1, 2, 0)$.

(2 Punkte)

Aufgabe 6 Betrachten Sie im $\mathbb{R}^4$ die vier Vektoren $v_1 = (2, 1, 0, 0)$, $v_2 = (4, 1, 4, 0)$, $v_3 = (3, 1, 4, 0)$ und $v_4 = (4, 3, 1, 2)$.

Berechnen Sie das Volumen (bzgl. der Standarddeterminantenform D_0 des $\mathbb{R}^4$) des von v_1, v_2, v_3, v_4 aufgespannten Parallelotops

$$P(v_1, v_2, v_3, v_4) = \left\{ \sum_{i=1}^{4} s_i v_i \;\middle|\; 0 \leq s_i \leq 1 \text{ für alle } i \in \{1, 2, 3, 4\} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

(3 Punkte)

Aufgabe 7

Betrachten Sie im $\mathbb{R}^4$ die drei Vektoren $v_1 = (1, 2, 3, 4)$, $v_2 = (1, -1, 2, -2)$ und $v_3 = (-1, 4, -1, 8)$.

a) Bestimmen Sie die Dimension des von v_1, v_2, v_3 aufgespannten Unterraums $U = \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ und eine Basis von U. (2 Punkte)

b) Ergänzen Sie diese Basis von U zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$. (3 Punkte)

Aufgabe 8

Der Endomorphismus $L \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ besitze bezüglich der geordneten Basis $\mathcal{G} = (v_1, v_2)$ mit $v_1 = (1, 2)$, $v_2 = (2, 3)$ des $\mathbb{R}^2$ die Matrix

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{G}}(L) = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie die Matrix von L bezüglich der Standardbasis $\mathcal{G}_0 = (e_1, e_2)$.

(7 Punkte)

Aufgabe 9

Sei $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $L \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ der Endomorphismus des $\mathbb{R}^3$ mit $\mathrm{Mat}(L) = A$ (d. h. L besitzt bzgl. der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ die Matrix A).

Berechnen Sie alle Eigenwerte von L und zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor.

Diese Eigenvektoren bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Wählen Sie eine Anordnung dieser Basis und geben Sie die Matrix von L bezüglich dieser geordneten Basis an. (8 Punkte)

Aufgabe 10

Sei $L \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$. Die Menge

$$\operatorname{graph}(L) := \left\{ \big(x, L(x)\big) \;\middle|\; x \in \mathbb{R}^2 \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

heißt der *Graph* von L. Zeigen Sie:

a) $\operatorname{graph}(L)$ ist ein 2-dimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^4$.

(4 Punkte)

b) Bezeichnet $V \subseteq \mathbb{R}^4$ den Unterraum

$$V = \left\{ (0, 0, x_3, x_4) \;\middle|\; x_3 \in \mathbb{R}, x_4 \in \mathbb{R} \right\},$$

so gilt $\operatorname{graph}(L) \oplus V = \mathbb{R}^4$. (2 Punkte)