(1.11) Rechenregeln (für Vereinigung, Durchschnitt, Komplement)

Sind $A, B, C$ Mengen, so gilt:

(a) $A \cup B = B \cup A,\ A \cap B = B \cap A$ "Kommutativgesetze"

(b) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ "Assoziativgesetze"
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ "Distributivgesetze"
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(d) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ "De Morgansche Regeln"
$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Beweis von (c):
Sei $x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in A$ und $(x \in B$ oder $x \in C) \Rightarrow$
$(x \in A$ und $x \in B)$ oder $(x \in A$ und $x \in C) \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Sei $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow (x \in A$ und $x \in B)$ oder $(x \in A$ und $x \in C)$
$\Rightarrow x \in A$ und $(x \in B$ oder $x \in C) \Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$

(1.12) Kartesische Produkt (benannt nach R. Descartes 1596-1650). Sind $A, B$ Mengen, so ist das <u>kartesische Produkt</u> $A \times B$ <u>von</u> $A$ <u>und</u> $B$ die Menge aller geordneten Paare $(a, b)$ mit $a \in A$ und $b \in B$.

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Bem.: $(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow a = a'$ und $b = b'$!

Bem.: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} =: \mathbb{R}^2$

Allgemeiner: Sind $A_1, \ldots, A_n$ Mengen, so

$$A_1 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}$$

Dabei gilt – per definitionem – $(a_1, \ldots, a_n) = (a'_1, \ldots, a'_n)$ genau dann, wenn $a_1 = a'_1, \ldots, a_n = a'_n$ gelten.

Bem.: $\underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n\text{-mal}} =: \mathbb{R}^n$. Ein Element $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ heißt <u>$n$-Tupel</u> von reellen Zahlen.

**Exkurs: Nochmals lineare Gleichungssysteme**

Das allgemeine lineare Gleichungssystem mit $m$ Gleichungen und $n$ Unbekannten:

$$\mathrm{I}\qquad \begin{array}{lccccccc} I_1 & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & +\ldots+ & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ I_2 & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & +\ldots+ & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ I_m & a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & +\ldots+ & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Gegeben sind die $a_{11}, \ldots, a_{mn}, b_1, \ldots, b_m$, gesucht die $x_1, \ldots, x_n$.

Lösungsmenge $L_I = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (x_1, \ldots, x_n) \text{ löst } I\}$

(1.13) Satz. *Sei $a_{11} \neq 0$ und sei $I'$ das Gleichungssystem mit den Zeilen*

$$I_1' = 1, I_2' = I_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} I_1, \ldots, I_m' = I_m - \frac{a_{m1}}{a_{11}} I_1.$$

*Dann gilt: $L_I = L_{I'}$*

Beweis: Sei $\overline{x} = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) \in L_I$. Dann erfüllt $\overline{x}$ die Gleichung $I_1'$ $(= I_1)$. Ist $2 \leq i \leq m$, so erfüllt $\overline{x}$ auch die Gleichung $I_i$, also auch $I_i' = I_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} I_1$. Also $x \in L_{I'}$.

Sei $\overline{x} = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) \in L_{I'}$. Dann erfüllt $\overline{x}$ die Gleichung $I_1$ $(= I_1')$.

Ist $2 \leq i \leq m$, so erfüllt $\overline{x}$ auch die Gleichung $I_i'$, also auch

$$I_i = I_i' + \frac{a_{i1}}{a_{11}} I_1.$$

Also $x \in L_I$.

(1.14) Definition. Das lineare Gleichungssystem I heißt homogen, falls $b_i = 0$ gilt für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Bemerkung: Ist I homogen, so ist $(0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ Lösung von I.

Auf $\mathbb{R}^n$ definieren wir eine Addition durch

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \quad \text{(komponentenweise Addition)}$$

und eine Multiplikation mit reellen Zahlen $r \in \mathbb{R}$ durch

$$r(x_1, \ldots, x_n) := (rx_1, \ldots, rx_n)$$

(1.15) Satz. *Ist I ein homogenes lineares Gleichungssystem, so hat seine Lösungsmenge $L_I$ folgende Eigenschaften:*

*Ist* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in L_I$ *und* $y = (y_1, \ldots, y_n) \in L_I$, *so gilt* $x + y \in L_I$.
*Ist* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in L_I$ *und* $r \in \mathbb{R}$, *so gilt* $rx \in L_I$.

Beweis: $x \in L_I$ und $y \in L_I \Rightarrow$ Für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$ gelten: $a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = 0$ und $a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n = 0$. Summiert man diese Gleichungen, so folgt

$$a_{i1}(x_1 + y_1) + \ldots + a_{in}(x_n + y_n) = 0 + 0 = 0$$

Also erfüllt $x+y = (x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n)$ für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$ die Gleichung $I_i$, d.h. $x+y \in L_I$.

Die 2. Behauptung folgt analog durch Multiplikation von $I_i$ mit $r$.

Bemerkung: Besitzt ein homogenes lineares Gleichungssystem I eine Lösung $x \neq (0, \ldots, 0)$, so besitzt I nach (1.15) unendlich viele Lösungen ($\forall r \in \mathbb{R} : rx \in L_I$).

Zu einem linearen Gleichungssystem I bezeichne $I^{\text{hom}}$ das zugehörige homogene lineare Gleichungssystem, das sich nur dadurch von I unterscheidet, daß alle rechten Seiten von I durch 0 ersetzt werden.

(1.16) Satz. *Es existiere eine Lösung $\overline{x} = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$ des linearen Gleichungssystems I. Dann gilt*

$$L_I = \{\overline{x} + x \mid x \in L_{I^{\text{hom}}}\}.$$

Ohne die Mengensprechweise drückte man die Aussage von (1.16) früher durch folgenden langen Satz aus: Die allgemeine Lösung eines linearen Gleichungssystems ist eine spezielle Lösung dieses Gleichungssystems plus die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Gleichungssystems.

Beweis:

a) Sei $y \in L_I$. Wie zeigen: $y - \overline{x} \in L_{I^{\text{hom}}}$ (wobei $y - \overline{x} := y + (-1)\overline{x}$).

$$\{y, \overline{x}\} \subseteq L_I \Rightarrow \forall i \in \{1, \ldots, m\} \quad : \quad \begin{array}{l} a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n = b_i \text{ und} \\ a_{i1}\overline{x}_1 + \ldots + a_{in}\overline{x}_n = b_i \end{array}$$

Subtraktion dieser Gleichungen liefert:

$$a_{i1}(y_1 - \overline{x}_1) + \ldots + a_{in}(y_n - \overline{x}_n) = b_i - b_i = 0$$

Also: $y - \overline{x} \in L_{I^{\text{hom}}}$. Wir nennen $y - \overline{x} =: x \in L_{I^{\text{hom}}}$ und erhalten $y = \overline{x} + x$ mit $x \in L_{I^{\text{hom}}}$.

b) Sei $x \in L_{I^{\text{hom}}}$. Dann gilt für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$:

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = 0$$

Wegen $y \in L_I$ gilt für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$:

$$a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n = b_i$$

Addition dieser Gleichungen liefert:

$$a_{i1}(x_1 + y_1) + \ldots + a_{im}(x_m + y_m) = b_i \quad (\text{für alle } i \in \{1, \ldots, m\})$$

also $y + x \in L_I$.