Zurück zur Mengenlehre:

Abbildungen zwischen Mengen

(1.17) Def.: Es seien M, N Mengen. Eine <u>Abbildung</u> $f : M \to N$ <u>von</u> M <u>nach</u> N ist eine Vorschrift, die jedem $x \in M$ genau ein Element $f(x) \in N$ zuordnet.

Beispiele:

a) $M = N = \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) := 3x^3 - x + 1$
b) $M = \mathbb{R}$, $N = \mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) := e^x$.
c) $f : \mathbb{Z} \to \{0,1\}$, $f(x) := \begin{cases} 0 & x \text{ gerade} \\ 1 & x \text{ ungerade} \end{cases}$
d) M Menge. $\mathrm{id}_M : M \to M$, $\forall x \in M : \mathrm{id}_M(x) := x$. “Identität von M”.
e) $A \subseteq B$. $i : A \to B$, $\forall x \in A : i(x) := x$ “Inklusionsabbildung”
f) Seien $A_1, \ldots, A_n$ Mengen und $i \in \{1, \ldots, n\}$.
$p_i : A_1 \times \ldots \times A_n \to A_i, p_i(a_1, \ldots, a_n) := a_i$ “Projektion auf die i’te Komponente”.
g) $+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : +(x, y) := x + y$

(1.18) Def.: Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt

(a) injektiv, falls für alle $x \in M, y \in M$ gilt: $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.
(b) surjektiv, falls für alle $y \in N$ ein $x \in M$ existiert, so daß $f(x) = y$ gilt.
(c) bijektiv, falls f injektiv und surjektiv is.

Von den obigen Beispielen ist a) surjektiv, aber nicht injektiv, während b) bijektiv ist.

(1.19) Def. (Komposition, Hintereinanderausführung) Seien A, B, C, D Mengen mit $B \subseteq C$ und $f : A \to B$, $g : C \to D$ Abbildungen. Dann ist $g \circ f : A \to D$ definiert durch: Für alle $x \in A$ ist $(g \circ f)(x) := g(\underbrace{f(x)}_{\in B})$.

Symbolisch: $\overbrace{A \xrightarrow{f} B \subseteq C \xrightarrow{g} D}^{g \circ f}$

Bem.: $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D \Rightarrow h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f =: h \circ g \circ f$

Schreibweise: Ist $f : A \to B$ Abbildung und $C \subseteq A$, so bezeichne

$$f(C) := \{y \in B \mid \exists x \in C : f(x) = y\} \text{“Bild von } C \text{ unter } f\text{”}$$

Ist $D \subseteq B$, so bezeichne

$$f^{-1}(D) := \{x \in A \mid f(x) \in D\} \text{ “Urbild von } D \text{ unter } f\text{”}$$

Bem:

$f : A \to B$ surjektiv $\Leftrightarrow$ $f(A) = B$.
$f : A \to B$ injektiv $\Leftrightarrow$ Für alle $y \in B$ enthält $f^{-1}(\{y\})$ höchstens 1 Element.

(1.20) Rechenregeln: Sei $f : M \to N$ Abbildung, $A \subseteq M$, $B \subseteq M$. Dann gilt

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
(b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$
(c) $f(M \setminus A) \supseteq f(M) \setminus f(A) \quad (\Leftrightarrow f(M) \setminus f(A) \subseteq f(M \setminus A))$
Für alle $C \subseteq N$, $D \subseteq N$ gilt:
(d) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$
(e) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$
(f) $f^{-1}(N \setminus C) = M \setminus f^{-1}(C)$

Beweis von (f):

$$x \in f^{-1}(N \setminus C) \Rightarrow x \in M \text{ und } f(x) \in N \setminus C$$
$$\Rightarrow x \in M \text{ und } f(x) \notin C \Rightarrow x \in M \setminus f^{-1}(C)$$
$$x \in M \setminus f^{-1}(C) \Rightarrow x \in M \text{ und } x \notin f^{-1}(C) \Rightarrow x \in M \text{ und } f(x) \notin C$$
$$\Rightarrow f(x) \in N \setminus f^{-1}(C)$$

Beispiel zu (b):

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$$
$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}, B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$
$$\Rightarrow A \cap B = \emptyset, \text{ aber } f(A) = f(B) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} (=: \mathbb{R}_{>0})$$
$$\text{d.h. } f(A) \cap f(B) = \mathbb{R}_{>0} \neq \emptyset.$$

(1.21) Def.: Ist $f : M \to N$ Abbildung und $A \subseteq M$, so ist die Einschränkung (Restriktion) $f|A (= f|_A) : A \to N$ von f auf A definiert durch: Für alle $x \in A$ ist $(f|A)(x) = f(x)$.

Bemerkung: Bezeichnet $i : A \to M$ die Inklusion, so gilt $f|A = f \circ i$

(1.22) Fakt: Ist $f : M \to N$ bijektive Abbildung, so existiert genau eine Abbildung $f^{-1} : N \to M$, so daß $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_M$ gilt. Für diese Abbildung f^{-1} gilt auch $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_N$.

Vorsicht: Das Symbol f^{-1} wird in unterschiedlichen Bedeutungen verwendet!

Bew.: f bijektiv $\Leftrightarrow \forall y \in N$ ex. genau ein $x \in M : f(x) = y$.

Eindeutigkeit von f^{-1}: Gilt $f(x) = y$, so muß $\begin{aligned} f^{-1}(y) &= f^{-1}(f(x)) = (f^{-1} \circ f)(x) \\ &= \mathrm{id}_M(x) = x \text{ gelten.} \end{aligned}$

Definiere $f^{-1} : N \to M$ durch $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$

(1.23) Def.: Seien M, N Mengen. Eine Relation auf (M, N) ist eine Teilmenge von $M \times N$. (Ist $M = N$, so spricht man von einer Relation auf M)

Schreibweise: Sei $R \subseteq M \times N$. Statt $(x, y) \in R$ schreibt man auch xRy.

Beispiele:

1) $\Delta_M = \{(x, x) \mid x \in M\}$ die Diagonale in $M \times M$.

2) Sei $f : M \to N$ Abbildung. Dann ist der Graph von f,

$$\text{graph }(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in M\}$$

eine Relation auf (M, N). Bem.: $\Delta_M = \text{graph }(\text{id}_M)$

3) Sei $M = N = \mathbb{R}$ und $R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y^2\}$. Diese Relation ist nicht Graph einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(1.24) Def. Sei M Menge, $R \subseteq M \times M$ Relation auf M. Dann heißt

(a) R reflexiv $\Leftrightarrow \forall x \in M : xRx \quad (\Leftrightarrow \Delta_M \subseteq R)$
(b) R symmetrisch $\Leftrightarrow (\forall x, y \in M : xRy \Leftrightarrow yRx)$
(c) R transitiv $\Leftrightarrow (\forall x, y, z \in M : xRy$ und $yRz \Rightarrow xRz)$
(d) R Äquivalenzrelation $\Leftrightarrow R$ ist reflexiv, symmetrisch und transitiv

Bei Äquivalenzrelationen R schreibt man oft statt xRy: $x \sim_R y$ oder kurz $x \sim y$ (wenn klar ist, welches R gemeint ist).

Beispiele:

1) Auf $M = \mathbb{R}$ kennen wir die Relation "kleiner gleich", d.h.

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$$

R ist reflexiv und transitiv, aber nicht symmetrisch. (Beweis?)

2) Sei $M = \mathbb{Z}$, $p \geq 2$ feste natürliche Zahl.

$$R := \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \mid n - m \text{ ist durch } p \text{ teilbar}\}.$$

Wir zeigen: R ist eine Äquivalenzrelation

(a) $\forall m \in \mathbb{Z}$: $m \sim_R m$, da $m - m = 0$ durch p teilbar: $0 = 0 \cdot p$
(b) Es gelte $m \sim_R n \quad \Rightarrow \quad n - m$ durch p teilbar $\Rightarrow m - n$ durch p teilbar
$\Rightarrow \quad n \sim_R m$
(c) Es gelte $k \sim_R m$ und $m \sim_R n \Rightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{Z} : m - k = jp, n - m = lp$
$\Rightarrow n - k = (l + j)p$ und $l + j \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \sim_R n$.

Langes Beispiel: Eine Zerlegung $\mathcal{M}$ einer Menge M, ist eine Menge $\mathcal{M}$, deren Elemente Teilmengen von M sind, so daß gilt:

(1) $A \in \mathcal{M}$, $B \in \mathcal{M} \Rightarrow A = B$ oder $A \cap B = \emptyset$.
(2) $\bigcup\limits_{A \in \mathcal{M}} A = M$. (wobei $\bigcup\limits_{A \in \mathcal{M}} A := \{x \mid \exists A \in \mathcal{M} : x \in A\}$)

Wir werden sehen, daß eine Äquivalenzrelation auf M im Grunde das gleiche ist, wie eine Zerlegung von M. Zunächst überlegen wir, wie wir aus einer Zerlegung eine Äquivalenzrelation erhalten: Zu einer Zerlegung $\mathcal{M}$ von M definieren wir die Relation

$$R = \{(x, y) \in M \times M \mid \exists A \in \mathcal{M} : \{x, y\} \subseteq A\}$$

Wir zeigen: R ist eine Äquivalenzrelation.

(a) Sei $x \in M$. Wir wollen zeigen, daß $(x,x) \in R$ gilt. Wegen (2) existiert ein $A \in \mathcal{M}$, so daß $x \in A$ gilt. Also gilt $\{x,x\}(=\{x\}) \subseteq A$, d.h. $(x,x) \in R$.
(b) $\{x,y\} \subseteq A \Leftrightarrow \{y,x\} \subseteq A$
(c) Es gelte $(x,y) \in R$ und $(y,z) \in R \Rightarrow \exists A \in \mathcal{M}$, $B \in \mathcal{M}$ mit $\{x,y\} \subseteq A$, $\{y,z\} \subseteq B$ $\Rightarrow y \in A \cap B$, d.h. $A \cap B \neq \emptyset \overset{(1)}{\Rightarrow} A = B \Rightarrow \{x,z\} \in A \Rightarrow (x,z) \in R$.

Bezeichnung: Sei $R \subseteq M \times M$ eine Äquivalenzrelation und $x \in M$. Dann heißt

$[x]_R \;:=\; \{y \in M \mid (x,y) \in R\}$ die Äquivalenzklasse von x und
$M/R \;:=\; \{[x]_R \mid x \in M\}$ die Menge der Äquivalenzklassen, die auch "M modulo R" genannt wird.

(1.25) Fakt: Sei $R \subseteq M \times M$ eine Äquivalenzrelation. Dann ist M/R eine Zerlegung von M.

Beweis: Offensichtlich ist jedes Element von M/R eine Teilmenge von M (nämlich eine Äquivalenzklasse). Wir zeigen, daß die Menge M/R die Eigenschaften (1) und (2) hat.

Zu (2): Offensichtlich gilt $\bigcup_{[x]_R \in M/R} [x]_R \subseteq M$. Sei umgekehrt $x \in M$. Die Reflexivität (a) von R besagt, daß $(x,x) \in R$ gilt, also $x \in [x]_R$. Damit $M \subseteq \bigcup_{[x]_R \in M/R} [x]_R$.

Zu (1): Wir zeigen, daß folgende Aussagen $(\alpha), (\beta), (\gamma)$ über Elemente $x \in M, y \in M$ äquivalent sind:

(α) $[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$
(β) $x \sim y$
(γ) $[x]_R = [y]_R$

1. Schritt: $(\alpha) \Rightarrow (\beta)$: Sei $z \in [x]_R \cap [y]_R$, d.h. es gelten $x \sim z$ und $y \sim z$. Die Symmetrie und Transitivität von $\sim$ implizieren dann $x \sim y$.
2. Schritt: $(\beta) \Rightarrow (\gamma)$: Wegen der Symmetrie der Voraussetzung $x \sim y$ genügt es, $[y]_R \subseteq [x]_R$ zu zeigen. Sei $w \in [y]_R$, d.h. $y \sim w$. Unsere Voraussetzung $x \sim y$ ergibt zusammen mit $y \sim w$ und der Transitivität, daß $x \sim w$ gilt, d.h. $w \in [x]_R$.
3. Schritt: $(\gamma) \Rightarrow (\alpha)$: Wegen $x \in [x]_R$ folgt aus $[x]_R = [y]_R$, daß $[x]_R \cap [y]_R = [x]_R \neq \emptyset$ gilt.

Sind nun A und B Elemente von M/R, etwa $A = [x]_R$ und $B = [y]_R$ für Elemente x, y von M, so gilt wegen $(\alpha) \Leftrightarrow (\beta)$ entweder $A \cap B = \emptyset$ oder $A = B$. Das beweist (1).

Beispiel: Es sei nun wieder $p \in \mathbb{N}, p \geq 2$ und wir betrachten die Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$, die durch

$$m \sim n \Leftrightarrow n - m \text{ ist durch } p \text{ teilbar}$$

definiert ist, vgl. Bsp. 2 nach (1.24). Dann sind die Äquivalenzklassen von $\sim$ genau die Teilmengen von $\mathbb{Z}$, die aus den ganzen Zahlen bestehen, die bei Division (mit Rest) durch p, den gleichen Rest ergeben. Sie heißen deshalb auch die "Restklassen mod p". Es gibt genau p verschiedene solche Restklassen mod p, nämlich

$$\begin{array}{lcll}
[0]_p & = & \{np \mid n \in \mathbb{Z}\} & \text{Rest } 0 \text{ bei Division durch } p \\
[1]_p & = & \{np + 1 \mid n \in \mathbb{Z}\} & \text{Rest } 1 \text{ bei Division durch } p \\
 & \vdots & & \\
[p-1]_p & = & \{np + (p-1) \mid n \in \mathbb{Z}\} & \text{Rest } p-1 \text{ bei Division durch } p \\
 & = & \{np - 1 \mid n \in \mathbb{Z}\} &
\end{array}$$

Für diese Äquivalenzrelation ist folgende Bezeichnung gebräuchlich:

$$m \sim n \Leftrightarrow m \equiv n (\mathrm{mod}\ p)$$