10. Affine und euklidische Geometrie.

In der analytischen Geometrie beschreibt man nach Wahl eines Koordinatensystems Punkte durch n-Tupel von Zahlen ($n = 2$ für die Ebene, $n = 3$ für den 3-dimensionalen Raum), die man als Vektoren eines Vektorraums betrachten kann. Was diese Punkte eigentlich selbst sind, wird dabei mathematisch nicht gesagt und der Anschauung überlassen. Das Einführen von Koordinaten zerstört die Homogenität des Raumes durch die Auszeichnung eines Punktes als 0-Punkt des Koordinatensystems und durch Auszeichnung der Richtungen der Koordinatenachsen. In diesem Kapitel wird der „affine Punktraum“ eingeführt, mit dessen Hilfe der Unterschied zwischen Punkten und Vektoren und das Einführen von Koordinaten präzisiert werden kann.

(10.1) Def.: Ein affiner Raum $\mathcal{A}$ über einem K-Vektorraum V ist eine Menge $\mathcal{A} \neq \emptyset$ zusammen mit einer Abbildung $+ : \mathcal{A} \times V \to \mathcal{A}$, für die gilt:

(A_1) Für alle $a \in \mathcal{A}$, für alle $v, w \in V$ gilt: $(a + v) + w = a + (v + w)$.
(A_2) Für alle $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ existiert genau ein $v \in V$, so daß $a_2 = a_1 + v$ gilt.
Wir bezeichnen dieses $v \in V$ als $v =: \overrightarrow{a_1 a_2}$.

Bez.: Die Dimension des affinen Raums $\mathcal{A}$ ist die Dimension des zugehörigen Vektorraums V.

Bem.:

1) Aus (A_1) und (A_2) folgt $\overrightarrow{aa} = 0$, $\overrightarrow{a_1 a_2} = -\overrightarrow{a_2 a_1}$ und $\overrightarrow{a_1 a_2} + \overrightarrow{a_2 a_3} = \overrightarrow{a_1 a_3}$.
2) Die Vorstellung hinter der Abbildung $+ : \mathcal{A} \times V \to \mathcal{A}$, $(a, v) \to a + v$ ist, daß der Vektor v am Punkt a angetragen einen neuen Punkt, genannt $a + v$, bestimmt. Entsprechend nennt man $v = \overrightarrow{a_1 a_2}$ den Verbindungsvektor von a_1 nach a_2. Die Bezeichnung $+$ für die Abbildung $\mathcal{A} \times V \to \mathcal{A}$ ist zwar oft praktisch, aber auch irreführend, da sie von der – gleich bezeichneten – Addition in V unterschieden werden muß. In der Gleichung in (A_1) beziehen sich etwa die ersten drei Zeichen $+$ auf die Abbildung $\mathcal{A} \times V \to \mathcal{A}$, das letzte dagegen auf die Addition in V.

Im folgenden Standardbeispiel eines affinen Raums verschwindet dieser Unterschied, und das ist auch der Grund für diese Bezeichnung.

(10.2) Beispiel: Sei V K-Vektorraum. Wir setzen $\mathcal{A} := V$ und nehmen als Abbildung $\mathcal{A} \times V \to V$ die übliche Addition $V \times V \to V$. Dann ist (A_1) gerade das Assoziativgesetz bzgl. $+$, während (A_2) aus der (eindeutigen) Existenz des additiven Inversen folgt.

Hier ein Beispiel, in dem der affine Raum nicht direkt ein Vektorraum „ist“:

(10.3) Beispiel: Sei $A \in K^{n \times n}$ eine Matrix, $w_0 \in K^n$ und

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &:= \{v \in K^n \mid Av = w_0\} \neq \emptyset, \\ V &:= \{u \in K^n \mid Au = 0\} \end{aligned}$$

Wir definieren $\mathcal{A} \times V \to \mathcal{A}$ durch die übliche Addition in K^n. Dann gilt in der Tat: $v \in \mathcal{A}$, $u \in V \Rightarrow v + u \in \mathcal{A}$. Denn $A(v + a) = Av + Au = Av = w_0$. Sind $v_1, v_2 \in \mathcal{A}$, so ist der Verbindungsvektor $\overrightarrow{v_1 v_2}$ gerade $v_2 - v_1$, da $v_1 + (v_1 - v_1) = v_1$ gilt, und es gilt in der Tat $\overrightarrow{v_1 v_2} = v_1 - v_1 \in V$, denn $A(v_2 - v_1) = Av_2 - Av_1 = w_0 - w_0 = 0$. In diesem Fall ist

$$\dim \mathcal{A} := \dim V = n - \operatorname{rg}(A).$$

Mengen $\mathcal{A}$ wie in (10.3) kamen schon nach (3.25) vor und wurden damals „affine Unterräume des Vektorraums K^n" genannt. Wenn man K^n wie in (10.2) als affinen Raum interpretiert, so ist dies ein Spezialfall von

(10.4) Def.: Eine Teilmenge $\mathcal{U}$ eines affinen Raums $\mathcal{A}$ heißt affiner Unterraum von $\mathcal{A}$, falls ein Untervektorraum $V_{\mathcal{U}}$ von V und ein $a_0 \in \mathcal{U}$ existiert, so daß

$$\mathcal{U} = \{a_0 + v \mid v \in V_{\mathcal{U}}\}$$

gilt.

(10.5) Lemma. Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{A}$ affiner Unterraum und seien $a_0, V_{\mathcal{U}}$ wie in (10.4). Dann gilt für jedes $a_1 \in \mathcal{U}$:

$$\mathcal{U} = \{a_1 + v \mid v \in V_{\mathcal{U}}\}.$$

Bem.: Das zeigt, daß im Fall eines affinen Unterraums $\mathcal{U}$ die Menge der Verbindungsvektoren von einem festen Punkt in $\mathcal{U}$ zu beliebigen Punkten in $\mathcal{U}$ ein Untervektorraum von V ist, der unabhängig von der Wahl des festen Punktes in $\mathcal{U}$ ist und nur von $\mathcal{U}$ abhängt. $V_{\mathcal{U}}$ heißt auch der Richtungsraum von $\mathcal{U}$. Wir definieren: $\dim \mathcal{U} := \dim V_{\mathcal{U}}$.

Bew.:

(i) $\mathcal{U} \subseteq \{a_1 + v \mid v \in V_{\mathcal{U}}\}$: Sei $b \in \mathcal{U}$. Wir müssen zeigen, daß $\overrightarrow{a_1 b} \in V_{\mathcal{U}}$ gilt (denn das impliziert $b = a_1 + v$ mit $v = \overrightarrow{a_1 b} \in V_{\mathcal{U}}$). Wegen $b \in \mathcal{U}$ und $a_1 \in \mathcal{U}$ gelten $\overrightarrow{a_0 b} \in V_{\mathcal{U}}$ und $\overrightarrow{a_0 a_1} = -\overrightarrow{a_1 a_0} \in V_{\mathcal{U}}$. Da $V_{\mathcal{U}}$ Untervektorraum ist, folgt $\overrightarrow{a_1 a_0} + \overrightarrow{a_0 b} = \overrightarrow{a_1 b} \in V_{\mathcal{U}}$, wie behauptet.

(ii) $\{a_1 + v \mid v \in V_{\mathcal{U}}\} \subseteq \mathcal{U}$: Sei $v \in V_{\mathcal{U}}$. Dann gilt

$$a_1 + v = (a_0 + \overrightarrow{a_0 a_1}) + v \overset{(A_2)}{=} a_0 + (\overrightarrow{a_0 a_1} + v)\,.$$

Wegen $a_1 \in \mathcal{U}$ folgt $\overrightarrow{a_0 a_1} \in V_{\mathcal{U}}$, und da $V_{\mathcal{U}}$ Untervektorraum ist, folgt $\overrightarrow{a_0 a_1} + v \in V_{\mathcal{U}}$. Also gilt $a_1 + v = a_0 + (\overrightarrow{a_0 a_1} + v) \in \mathcal{U}$.

Bez.: Ein affiner Raum (oder Unterraum) der Dimension 1 heißt (affine) Gerade, ein affiner Raum (oder Unterraum) der Dimension 2 heißt (affine) Ebene. Ist $\mathcal{A}$ n-dimensionaler affiner Raum und $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{A}$ $(n-1)$-dimensionaler affiner Unterraum, so heißt $\mathcal{U}$ affine Hyperebene in $\mathcal{A}$.

Bem.: Ist $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{A}$ affiner Unterraum, so folgt aus (10.5), daß für alle $a \in \mathcal{U}$ gilt:

$$\mathcal{U} = a + V_{\mathcal{U}} := \{a + v \mid v \in V_{\mathcal{U}}\}.$$

Ein 0-dimensionaler affiner Unterraum besteht aus genau einem Punkt.

(10.6) Fakt: Sind $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ affine Unterräume von $\mathcal{A}$ und gilt $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \neq \emptyset$, so ist $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ affiner Unterraum von $\mathcal{A}$, und es gilt

$$V_{\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2} = V_{\mathcal{U}_1} \cap V_{\mathcal{U}_2}.$$

Bew.: Wähle $a \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$. Dann folgt aus $\mathcal{U}_1 = a + V_{\mathcal{U}_1}$ und $\mathcal{U}_2 = a + V_{\mathcal{U}_2}$, daß $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = a + (V_{\mathcal{U}_1} \cap V_{\mathcal{U}_2})$ gilt.

(10.7) Fakt: Sind $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ affine Unterräume von $\mathcal{A}$ und gilt $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \neq \emptyset$, so gilt $\dim(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) = \dim(V_{\mathcal{U}_1} \cap V_{\mathcal{U}_2})$.

(10.8) Def.: Zwei affine Unterräume $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ von $\mathcal{A}$ heißen parallel, falls $V_{\mathcal{U}_1} \subseteq V_{\mathcal{U}_2}$ oder $V_{\mathcal{U}_2} \subseteq V_{\mathcal{U}_1}$ gilt.

(10.9) Fakt: Sei $\mathcal{A}$ endlichdimensionaler affiner Raum, $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{A}$ affiner Unterraum und $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{A}$ affine Hyperebene. Gilt $\mathcal{U} \cap \mathcal{H} = \emptyset$, so sind $\mathcal{U}$ und $\mathcal{H}$ parallel.

Bem.:

1) Gilt $\mathcal{U} \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$, so folgt aus (10.7), daß $\mathcal{U} \cap \mathcal{H}$ ein affiner Unterraum mit $\dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{H}) = \dim \mathcal{U} - 1$ ist.
2) Ist $\dim \mathcal{A} = 2$, so besagt (10.9), daß zwei Geraden in der affinen Ebene $\mathcal{A}$ entweder parallel sind oder genau einen Schnittpunkt haben.

Bew.: Wir nehmen an, $\mathcal{U}$ und $\mathcal{H}$ seinen nicht parallel. Dann folgt $V_{\mathcal{U}} + V_{\mathcal{H}} = V_{\mathcal{A}}$. Ist $a \in \mathcal{U}$, $b \in \mathcal{H}$, so läßt sich der Vektor $\overrightarrow{ab} \in V_{\mathcal{A}}$ darstellen als

$$\overrightarrow{ab} = v_1 + v_2$$

mit $v_1 \in V_{\mathcal{U}}$, $v_2 \in V_{\mathcal{H}}$. Daraus folgt

$$b = a + (v_1 + v_2) \overset{(A_1)}{=} (a + v_1) + v_2$$

und

$$b + (-v_2) \overset{(A_1)}{=} (a + v_1) + (v_2 - v_2) \overset{(A_1)}{=} a + v_1.$$

Wegen $v_1 \in V_{\mathcal{U}}$, $-v_2 \in V_{\mathcal{H}}$ folgt $a + v_1 = b + (-v_2) \in \mathcal{U} \cap \mathcal{H}$, d.h. $\mathcal{U} \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$.

Def.: Sei $\mathcal{A}$ affiner Raum und $(a, b, c) \in \mathcal{A}^3$ ein (geordnetes) Tripel von Punkten in $\mathcal{A}$.

(a) Die Punkte $a, b, c \in \mathcal{A}$ heißen kollinear, falls es eine affine Gerade $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}$ gibt mit $\{a, b, c\} \subseteq \mathcal{G}$.
(b) Ist $(a, b, c) \in \mathcal{A}^3$ ein kollineares Punktetripel und gilt $a \neq b$, so heißt der durch die Gleichung $\overrightarrow{ac} = \lambda \overrightarrow{ab}$ eindeutig bestimmte Skalar $\lambda \in K$ das Teilverhältnis des kollinearen Punktetripels (a, b, c), bezeichnet durch $\lambda =: TV(a, b, c)$.

Bsp.:

1) c heißt der Mittelpunkt der Strecke von a nach b, wenn $TV(a, b, c) = \frac{1}{2}$ gilt. Das ist äquivalent zu $c = a + \frac{1}{2}\overrightarrow{ab}$.

2) Betrachten wir $\mathbb{R}^2$ nach (10.2) als affinen Raum, so sind $a = (0, 1)$, $c = (1, 1)$ und $b = (3, 1)$ kollinear, da a, b, c auf der affinen Geraden $\mathcal{G} = a + (\mathbb{R} \times \{0\})$ liegen. Wegen
$$\overrightarrow{ac} = (1, 0) = \frac{1}{3}\overrightarrow{ab}$$
gilt $TV(a, b, c) = \frac{1}{3}$.

Bem.: Im Fall $K = \mathbb{R}$ hat $TV(a, b, c)$ folgende anschauliche Bedeutung, die für den Namen „Teilverhältnis“ verantwortlich ist: Wählt man auf V ein Skalarprodukt (oder – allgemeiner – eine Norm), so definiert man für $a, b \in \mathcal{A}$ die Streckenlänge von a nach b durch $\|\overrightarrow{ab}\|$. Dann gilt
$$|TV(a, b, c)| = \frac{\|\overrightarrow{ac}\|}{\|\overrightarrow{ab}\|},$$
d.h. $|TV(a, b, c)|$ ist das Verhältnis der Streckenlänge von a nach c zur Streckenlänge von a nach b. Dieses Verhältnis ist unabhängig von der Wahl des Skalarprodukts (oder der Norm). Das Vorzeichen von $TV(a, b, c)$ hängt davon ab, ob a auf $\mathcal{G}_{a,b}$ zwischen b und c liegt ($\Rightarrow TV(a, b, c) < 0$) oder nicht.

(10.10) Strahlensatz. *Seien $(a, b_1, c_1) \in \mathcal{A}^3$ und $(a, b_2, c_2) \in \mathcal{A}^3$ kollineare Punktetripel auf verschiedenen Geraden durch $a \notin \{b_1, b_2, c_1, c_2\}$. Dann sind $\mathcal{G}_{b_1,b_2}$ und $\mathcal{G}_{c_1,c_2}$ genau dann parallel, wenn $TV(a, b_1, c_1) = TV(a, b_2, c_2)$ gilt.*

Aufgabe: Fertigen Sie eine Skizze der in (10.10) beschriebenen Situation an.

Bew.: Nach Definition gilt
$$TV(a, b_1, c_1) = \lambda \Leftrightarrow \overrightarrow{ac_1} = \lambda\overrightarrow{ab_1}$$
und
$$TV(a, b_2, c_2) = \mu \Leftrightarrow \overrightarrow{ac_2} = \mu\overrightarrow{ab_2}.$$
Die zwei Geraden $\mathcal{G}_{b_1,b_2}$ und $\mathcal{G}_{c_1,c_2}$ sind genau dann parallel, wenn die Richtungsvektoren $\overrightarrow{b_1b_2}$ und $\overrightarrow{c_1c_2}$ linear abhängig sind. Aus $\overrightarrow{ac_1} + \overrightarrow{c_1c_2} = \overrightarrow{ac_2}$ folgt
$$\overrightarrow{c_1c_2} = \overrightarrow{ac_2} - \overrightarrow{ac_1} = \mu\overrightarrow{ab_2} - \lambda\overrightarrow{ab_1}$$
und ebenso
$$\overrightarrow{b_1b_2} = \overrightarrow{ab_2} - \overrightarrow{ab_1}.$$
Da nach Voraussetzung $\mathcal{G}_{a,b_1} \neq \mathcal{G}_{a,b_2}$ gilt, sind $\overrightarrow{ab_1}$ und $\overrightarrow{ab_2}$ linear unabhängig. Die vorangehenden Gleichungen stellen $\overrightarrow{b_1b_2}$ und $\overrightarrow{c_1c_2}$ als Linearkombinationen dieser linear unabhängigen Vektoren $\overrightarrow{ab_1}$ und $\overrightarrow{ab_2}$ dar. Also sind $\overrightarrow{b_1b_2}$ und $\overrightarrow{c_1c_2}$ genau dann linear abhängig ($\Leftrightarrow \mathcal{G}_{b_1,b_2}$ und $\mathcal{G}_{c_1,c_2}$ sind parallel), wenn $\det\begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -\lambda & -1 \end{pmatrix} = 0$ gilt, d.h. wenn $\lambda = TV(a, b_1, c_1) = TV(a, b_2, c_2) = \mu$ gilt.

In der Mathematik sind stets neben den Objekten einer Theorie (hier: neben den affinen Räumen) auch die „strukturerhaltenden" Abbildungen zwischen diesen Objekten wichtig (hier: die in (10.11) definierten „affinen Abbildungen").

(10.11) Def.: Für $i = 0, 1$ seien $\mathcal{A}_i$ affine Räume über den K-Vektorräumen V_i. Eine Abbildung $A : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ heißt affin, wenn es einen K-Vektorraumhomomorphismus $L_A \in \mathrm{Hom}(V_0, V_1)$ gibt, so daß für alle $a, b \in \mathcal{A}_0$ gilt:

$$L_A(\overrightarrow{ab}) = \overrightarrow{A(a)A(b)}.$$

Eine bijektive affine Abbildung heißt Affinität.

(10.12) Bsp.: Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_1$ affine Räume über den K-Vektorräumen V, V_0, V_1.

1) $A := \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$ ist affin mit $L_A = \mathrm{id}_V$.
2) Sei $v_0 \in V$ und $A : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ definiert durch
$$A(a) = a + v_0.$$
Dann ist A affin mit $L_A = \mathrm{id}_V$. Eine solche Abbildung heißt Translation.
3) Seien $a_0 \in \mathcal{A}_0$, $a_1 \in \mathcal{A}_1$, $L \in \mathrm{Hom}(V_0, V_1)$. Sei $A : \mathcal{A}_0 \to \mathcal{A}_1$ definiert durch
$$A(a) = a_1 + L(\overrightarrow{a_0a}).$$
Dann ist A affin und $L_A = L$.

Beweis zu 3): Wir müssen zeigen, daß für alle $a, b \in \mathcal{A}_0$ gilt:

$$\overrightarrow{A(a)A(b)} = L(\overrightarrow{ab}).$$

Der Vektor $v = \overrightarrow{A(a)A(b)} \in V_1$ ist durch die Gleichung

$$a_1 + L(\overrightarrow{a_0a}) + v = a_1 + L(\overrightarrow{a_0b})$$

definiert. Daraus folgt mit (A_2):

$$L(\overrightarrow{a_0a}) + v = L(\overrightarrow{a_0b}),$$

also

$$v = L(-\overrightarrow{a_0a}) + L(\overrightarrow{a_0b}) = L(\overrightarrow{aa_0} + \overrightarrow{a_0b}) = L(\overrightarrow{ab}),$$

wie behauptet.

Bem.: Ist $A : \mathcal{A}_0 \to \mathcal{A}_1$ affin, so gilt für jedes $a_0 \in \mathcal{A}_0$

$$(*) \qquad A(a) = A(a_0) + L_A(\overrightarrow{a_0a}),$$

d.h. A ist wie in (10.12), 3) darstellbar, wobei $a_0 \in \mathcal{A}_0$ beliebig ist, $a_1 := A(a_0)$ und $L = L_A$.
Begründung von $(*)$: $A(a) = A(a_0) + v$, wobei $v = \overrightarrow{A(a_0)A(a)} \overset{(10.11)}{=} L_A(\overrightarrow{a_0a})$.

Folgende Aussagen sind leicht einzusehen:

(10.13) Eine affine Abbildung $A : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ ist genau dann eine Translation, wenn $L_A = \mathrm{id}_V$ gilt. Eine affine Abbildung $A : \mathcal{A}_0 \to \mathcal{A}_1$ ist genau dann eine Affinität (d.h. A ist bijektiv), wenn $L_A \in \mathrm{Hom}(V_0, V_1)$ ein Isomorphismus ist. Es gilt dann $L_{A^{-1}} = (L_A)^{-1}$. Eine affine Abbildung $A : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ heißt Streckung mit Zentrum $a_0 \in \mathcal{A}$ und Streckfaktor $\lambda \in K$, falls $A(a_0 + v) = a_0 + \lambda v$ für alle $v \in V$ gilt.

(10.14) Ist $A : \mathcal{A}_0 \to \mathcal{A}_1$ affin und $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{A}_0$ affiner Unterraum, so ist $A(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{A}_1$ affiner Unterraum. Es gilt: $\mathcal{U} = a_0 + V_{\mathcal{U}} \Rightarrow A(\mathcal{U}) = A(a_0) + L_A(V_{\mathcal{U}})$. Ist $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{A}_1$ affiner Unterraum und ist die Urbildmenge

$$A^{-1}(\mathcal{U}) = \{a \in \mathcal{A} \mid A(a) \in \mathcal{U}\}$$

nicht leer, so ist $A^{-1}(\mathcal{U})$ affiner Unterraum von $\mathcal{A}_0$. Ist $a_0 \in A^{-1}(\mathcal{U})$, so gilt

$$A^{-1}(\mathcal{U}) = a_0 + L_A^{-1}(V_{\mathcal{U}}).$$

(10.15) Ist $A : \mathcal{A}_0 \to \mathcal{A}_1$ affin, sind $a, b, c \in \mathcal{A}_0$ und gilt $A(a) \neq A(b)$, so folgt:

$$TV(a, b, c) = TV(A(a), A(b), A(c)).$$

Eine Affinität zwischen zwei affinen Räumen $\mathcal{A}_0$ und $\mathcal{A}_1$ erlaubt es, alle Aussagen, Argumente etc. der affinen Geometrie in $\mathcal{A}_0$ in entsprechende Aussagen, Argumente etc. in $\mathcal{A}_1$ zu verwandeln. Nach (10.13) existiert genau dann eine Affinität von $\mathcal{A}_0$ nach $\mathcal{A}_1$, wenn $\mathcal{A}_0$ und $\mathcal{A}_1$ zu Vektorräumen über dem gleichen Körper gehören und $\dim \mathcal{A}_0 = \dim \mathcal{A}_1$ gilt. Es ist wichtig, zu erkennen, ob eine geometrische Aussage zur affinen Geometrie gehört. Die Aussage, daß sich die Seitenhalbierenden eines Dreiecks in einem Punkt schneiden, der diese Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1 teilt, gehört etwa zur affinen Geometrie, da sie sich nur auf Geraden und Teilverhältnisse bezieht. Man kann die Aussage direkt im affinen Raum $\mathbb{R}^2$ beweisen, aber folgender Weg ist wohl einfacher: Da je zwei Dreiecke durch eine Affinität aufeinander abgebildet werden können (siehe (10.17)), genügt es, die Aussage für gleichseitige Dreiecke zu beweisen. Das ist mit (euklidischen) Symmetrieargumenten leicht möglich.

(10.16) Def. Sei $\mathcal{A}$ affiner Raum über dem K-Vektorraum V, $\dim V = n > 0$. Ein $(n+1)$-Tupel $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathcal{A}^{n+1}$ von Punkten $a_0, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$ heißt Koordinatensystem für $\mathcal{A}$, falls die Vektoren $\overrightarrow{a_0a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_0a_n} \in V$ linear unabhängig sind (und damit eine Basis von V bilden). Ist $x \in V$ ein beliebiger Punkt, so gilt

$$\overrightarrow{a_0x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{a_0a_i}$$

mit durch x eindeutig bestimmten $x_i \in K$, $1 \leq i \leq n$. Diese x_i, $1 \leq i \leq n$, heißen die Koordinaten von x bezüglich des Koordinatensystems $(a_0, \ldots, a_n)$ und $(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ heißt der Koordinatenvektor von x (bzgl. $(a_0, \ldots, a_n)$).

Wichtige Bem.: Die Abbildung $A : x \in \mathcal{A} \to (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ ist eine Affinität, die $\mathcal{A}$ mit dem (nach (10.2)) als affinen Raum betrachteten K^n identifiziert. Dabei gilt $A(a_0) = 0 \in K^n$ und $A(a_i) = e_i \in K^n$ für $1 \leq i \leq n$. Das erlaubt, alle Probleme der affinen Geometrie in einem K^n zu betrachten. Das hat zwei Vorteile: Wir können im üblichen K^n rechnen (ohne die etwas umständlichen Axiome (A_1) und (A_2) zu bemühen) und wir können unser Koordinatensystem dem gegebenen Problem anpassen. Wir haben dadurch natürlich den „Vorteil" des affinen Raums, keinen ausgezeichneten Punkt und keine ausgezeichneten Richtungen zu besitzen, wieder verloren.

(10.17) Fakt. Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ affine Räume (über dem gleichen Körper) und $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathcal{A}^{n+1}$ ein Koordinatensystem für $\mathcal{A}$ und $(b_0, \ldots, b_n) \in \mathcal{B}^{n+1}$. Dann gibt es genau eine affine Abbildung $A : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ mit $A(a_i) = b_i$ für $0 \leq i \leq n$. A ist genau dann eine Affinität, wenn $(b_0, \ldots, b_n)$ ein Koordinatensystem für $\mathcal{B}$ ist.

Bew.: Es seien V und W die K-Vektorräume zu $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, und es sei $L \in \mathrm{Hom}(V, W)$ definiert durch $L(\overrightarrow{a_0 a_i}) = \overrightarrow{b_0 b_i}$ für $1 \leq i \leq n$, vgl. (4.6). Wir definieren $A : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ durch

$$A(a) = b_0 + L(\overrightarrow{a_0 a}).$$

Nach (10.12) ist A affin, und es gilt $A(a_0) = b_0$ und $A(a_i) = b_0 + L(\overrightarrow{a_0 a_i}) = b_0 + \overrightarrow{b_0 b_i} = b_i$ für $1 \leq i \leq n$. Die restlichen Aussagen lassen sich ähnlich einsehen.

Die Begriffe „affiner Unterraum" und „affine Abbildung" wurden in (10.4) und (10.11) durch Rückgriff auf die Begriffe „Untervektorraum" und „Vektorraumhomomorphismus" der linearen Algebra definiert. Es soll nun versucht werden, diese Begriffe allein mit Hilfe des affin-geometrischen Grundbegriffs „Gerade" zu charakterisieren.

(10.18) Def.: Eine Teilmenge M eines affinen Raums $\mathcal{A}$ heißt affin abgeschlossen, wenn M mit je zwei Punkten $a \neq b$ auch die Gerade

$$\mathcal{G}_{a,b} = \{a + \lambda \overrightarrow{ab} \mid \lambda \in K\}$$

durch a und b enthält (d.h. kürzer: $\{a, b\} \subseteq M$ und $a \neq b \Rightarrow \mathcal{G}_{a,b} \subseteq M$).

(10.19) Satz. *Im Körper K gelte $1 + 1 \neq 0$. Dann gilt: Eine Teilmenge $M \neq \emptyset$ von $\mathcal{A}$ ist genau dann affin abgeschlossen, wenn M ein affiner Unterraum von $\mathcal{A}$ ist.*

Bew.: Offensichtlich ist jeder affine Unterraum affin abgeschlossen. Sei umgekehrt M affin abgeschlossen und $a_0 \in M$. Wir zeigen, daß

$$U := \{\overrightarrow{a_0 a} \mid a \in M\}$$

Untervektorraum von V ist. Dann gilt $M = a_0 + U$ und das zeigt, daß M affiner Unterraum ist.

(i) Es gilt $0 = \overrightarrow{a_0 a_0} \in U$.
(ii) Ist $v \in U \setminus \{0\}$, $v = \overrightarrow{a_0 a}$ mit $a \in M$, so gilt nach Voraussetzung $\mathcal{G}_{a_0,a} \subseteq M$, d.h. $a_0 + (\lambda v) =: a_\lambda \in M$ für alle $\lambda \in K$. Daraus folgt für alle $\lambda \in K$: $\overrightarrow{a_0 a_\lambda} = \lambda v \in U$.
(iii) Seien $v = \overrightarrow{a_0 a} \in U$, $w = \overrightarrow{a_0 b} \in U$ mit $a, b \in M$. Gilt $v = w$, so folgt nach (ii): $v + w = (1+1)v \in U$. Wir können also annehmen, daß $v \neq w$ und damit $a \neq b$ gilt. Nach Voraussetzung gilt dann $\mathcal{G}_{a,b} \subseteq M$. Wegen $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{a a_0} + \overrightarrow{a_0 b} = -\overrightarrow{a_0 a} + \overrightarrow{a_0 b} = w - v$ gilt dann

$$\mathcal{G}_{a,b} = \{a + \lambda(w - v) \mid \lambda \in K\} = \{a_0 + (1 - \lambda)v + \lambda w \mid \lambda \in K\} \subseteq M.$$

Mit $\frac{1}{2} \in K$ sei das multiplikative Inverse von $1+1 \neq 0$ bezeichnet. Für $\lambda = \frac{1}{2}$ erhalten wir $a_0 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) v + \frac{1}{2} w = a_0 + \frac{1}{2}(v+w) \in M$, also $\frac{1}{2}(v+w) \in U$. Nach (ii) folgt $2 \cdot \left(\frac{1}{2}(v+w)\right) = v + w \in U$.

(10.20) Fundamentalsatz der affinen Geometrie (über $\mathbb{R}$). *Seien $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ affine Räume über den reellen Vektorräumen V, V'. Sei $\dim \mathcal{A} \geq 2$ und $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ eine Bijektion, die Geraden auf Geraden abbildet. Dann ist F eine Affinität.*

Der nicht ganz einfache Beweis wird durch eine Reihe von Hilfssätzen erledigt.

(10.21) Lemma. Sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$ affine Ebene. Dann ist $F(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}'$ eine affine Ebene.

Bew.: Sei (a_0, a_1, a_2) ein Koordinatensystem für $\mathcal{E}$. Dann gilt

$$\mathcal{G}_{a_0,a_1} \cap \mathcal{G}_{a_0,a_2} = \{a_0\}.$$

Da F injektiv ist und $F(\mathcal{G}_{a_0,a_1}) = \mathcal{G}_{F(a_0),F(a_1)}$, $F(\mathcal{G}_{a_0,a_2}) = \mathcal{G}_{F(a_0),F(a_2)}$ gilt, folgt

$$\mathcal{G}_{F(a_0),F(a_1)} \cap \mathcal{G}_{F(a_0),F(a_2)} = \{F(a_0)\}.$$

Deshalb existiert genau eine Ebene $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{A}'$, die $\mathcal{G}_{F(a_0),F(a_1)}$ und $\mathcal{G}_{F(a_0),F(a_2)}$ enthält. Ist $a \in \mathcal{E} \setminus (\mathcal{G}_{a_0,a_1} \cup \mathcal{G}_{a_0,a_2})$, so existiert eine Gerade $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{E}$ mit $a \in \mathcal{G}$, die $\mathcal{G}_{a_0,a_1}$ und $\mathcal{G}_{a_0,a_2}$ schneidet. Da F Geraden auf Geraden abbildet, folgt $F(a) \in F(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{E}'$. Damit haben wir $F(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{E}'$ bewiesen. Ähnlich zeigt man $\mathcal{E}' \subseteq F(\mathcal{E})$, aber wir werden das nicht benötigen.

(10.22) Lemma. F bildet parallele Geraden auf parallele Geraden ab.

Bew.: Seien $\mathcal{G} \neq \mathcal{H}$ parallele Geraden in $\mathcal{A}$. Dann existiert eine Ebene $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$ mit $\mathcal{G} \cup \mathcal{H} \subseteq \mathcal{E}$. Nach (10.21) existiert eine Ebene $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{A}'$, so daß

$$F(\mathcal{G}) \cup F(\mathcal{H}) \subseteq F(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{E}'$$

gilt. Da F injektiv ist, gilt $F(\mathcal{G}) \cap F(\mathcal{H}) = F(\mathcal{G} \cap \mathcal{H})$.

Bem. 2 nach (10.9) impliziert, daß $\mathcal{G} \cap \mathcal{H} = \emptyset$ gilt. Also gilt $F(\mathcal{G}) \cap F(\mathcal{H}) = \emptyset$ und die gleiche Bem. 2 zeigt dann, daß die Geraden $F(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{E}'$ und $F(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{E}'$ parallel sind.

Um den Fundamentalsatz (10.20) zu beweisen, wählen wir einen festen Punkt $a_0 \in \mathcal{A}$, setzen $a_0' := F(a_0) \in \mathcal{A}'$ und definieren $G : V \to V'$ durch: Für alle $v \in V$ gelte

$$F(a_0 + v) = a_0' + G(v)$$

oder äquivalent

$$G(v) = \overrightarrow{F(a_0)F(a_0 + v)}.$$

Dann gilt offensichtlich $G(0) = 0$. Der Rest des Beweises besteht darin, zu zeigen, daß $G \in \mathrm{Hom}(V, V')$ ($\Rightarrow$ (10.20)) gilt. Der Beweis der wichtigen Lemmata (10.23) und (10.25) beruht auf geometrischen Ideen, die am besten durch eine Skizze (!) klar werden.

(10.23) Lemma. Für alle linear unabhängigen v, w in V gilt

$$G(v + w) = G(v) + G(w).$$

Bew.: Wir betrachten die Geraden

$$\mathcal{G}'_v = \{a_0 + w + \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \text{ und } \mathcal{G}'_w = \{a_0 + v + \mu w \mid \mu \in \mathbb{R}\},$$

die einander im Punkt $a_0 + v + w$ schneiden. Da $\mathcal{G}_{v'}$ parallel zu $\mathcal{G}_v := \{a_0 + \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ ist, ist nach (10.22) auch $F(\mathcal{G}'_v)$ parallel zu $F(\mathcal{G}_v)$. Wegen $F(a_0 + w) = a'_0 + G(w) \in F(\mathcal{G}'_v)$ und $a'_0 \in F(\mathcal{G}_v)$, $F(a_0 + v) = a'_0 + G(v) \in F(\mathcal{G}_v)$ gilt

$$F(\mathcal{G}'_v) = \{a'_0 + G(w) + \lambda G(v) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

und analog

$$F(\mathcal{G}'_w) = \{a'_0 + G(v) + \mu G(w) \mid \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Da F injektiv ist und $\mathcal{G}_v$ und $\mathcal{G}_w := \{a_0 + \mu w \mid \mu \in \mathbb{R}\}$ einander genau in a_0 schneiden, gilt $F(\mathcal{G}_v) \cap F(\mathcal{G}_w) = \{a'_0\}$. Deshalb sind $G(v) = \overrightarrow{F(a_0)F(a_0 + v)}$ und $G(w) = \overrightarrow{F(a_0)F(a_0 + w)}$ linear unabhängig. Da $G(v)$ bzw. $G(w)$ Richtungsvektoren von $F(\mathcal{G}'_v)$ bzw. $F(\mathcal{G}'_w)$ sind, schneiden $F(\mathcal{G}'_v)$ und $F(\mathcal{G}'_w)$ einander genau im Punkt $F(a_0 + v + w) = a'_0 + G(v + w)$, dem Bild des Schnittpunkts von $\mathcal{G}'_v$ und $\mathcal{G}'_w$. Andererseits zeigen die obigen Formeln für $F(\mathcal{G}'_v)$ und $F(\mathcal{G}'_w)$, daß auch $a'_0 + G(v) + G(w) \in F(\mathcal{G}'_v) \cap F(\mathcal{G}'_w)$ gilt. Daraus folgt

$$G(v + w) = G(v) + G(w).$$

(10.24) Lemma. Für alle $v \in V$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

$$G(\lambda v) + G(\mu v) = G((\lambda + \mu)v).$$

Bem.: Aus (10.23) und (10.24) folgt $G(v + w) = G(v) + G(w)$ für alle $v, w \in V$.

Bew.: Wegen $G(0) = 0$ genügt es, die Fälle zu betrachten, in denen $v \neq 0$, $\lambda \neq 0$ und $\mu \neq 0$ gilt. Aufgrund unserer Voraussetzung $\dim \mathcal{A} \geq 2$ existiert ein zu v linear unabhängiger Vektor $w \in V$.

1. Fall: $\lambda + \mu \neq 0$. Dann sind w und $(\lambda + \mu)v$ linear unabhängig und (10.23) impliziert

$$G(w + (\lambda + \mu)v) = G(w) + G((\lambda + \mu)v).$$

Da $w + \lambda v$ und $w + \lambda v + \mu v$ linear unabhängig sind, folgt aus (10.23)

$$G(w + (\lambda + \mu)v) = G(w + \lambda v) + G(\mu v)$$

und analog

$$G(w + \lambda v) = G(w) + G(\lambda v).$$

Die letzten drei Gleichungen implizieren

$$G((\lambda + \mu)v) = G(\lambda v) + G(\mu v).$$

2. Fall: $\lambda = -\mu$. Da $\lambda v + w$ und $-\lambda v + w = \mu v + w$ linear unabhängig sind, folgt aus (10.23)

$$\begin{aligned} G(2w) = G((\lambda v + w) + (-\lambda v + w)) &= G(\lambda v + w) + G(-\lambda v + w) \\ &= G(\lambda v) + G(w) + G(-\lambda v) + G(w) \\ &= 2G(w) + G(\lambda v) + G(-\lambda v). \end{aligned}$$

Da nach dem 1. Fall $G(2w) = 2G(w)$ gilt ($\lambda = \mu := 1$), folgt daraus die Behauptung: $G(\lambda v) + G(-\lambda v) = 0 = G(\lambda v - \lambda v)$.

(10.25) Lemma. Es existiert eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so daß für alle $v \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$G(\lambda v) = f(\lambda)G(v).$$

Bew.: Wegen $G(0) = 0$ ist die Gleichung für $v = 0$ stets erfüllt und sie ist für $\lambda = 0$ und alle $v \in V$ erfüllt, wenn wir $f(0) = 0$ setzen. Wir setzen von jetzt ab $v \neq 0$ und $\lambda \neq 0$ voraus. Da F injektiv ist, gilt $F(a_0 + v) = a'_0 + G(v) \neq a'_0$. Nach Voraussetzung liegt $F(a_0 + \lambda v)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ auf der Geraden $\mathcal{G}_{a'_0, a'_0 + G(v)}$. Also existiert genau ein $f(\lambda, v) \in \mathbb{R}$, so daß

$$F(a_0 + \lambda v) = a'_0 + f(\lambda, v)G(v)$$

gilt. Wir bemerken, daß $TV(a'_0, F(a_0 + \lambda v), F(a_0 + v)) = \frac{f(\lambda,v)}{1-f(\lambda,v)}$ gilt. Wir wollen zeigen, daß $f(\lambda, v)$ unabhängig von v ist, d.h. daß für alle $\lambda \neq 0$, $v \neq 0$, $w \neq 0$ gilt:

$$f(\lambda, v) = f(\lambda, w).$$

1. Fall: v und w sind linear unabhängig. Dann betrachten wir die Geraden $\mathcal{H} = \{a_0 + \mu v \mid \mu \in \mathbb{R}\}$ und $\mathcal{J} = \{a_0 + \mu w \mid \mu \in \mathbb{R}\}$ durch a_0 und die Geraden $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_{a_0+v, a_0+w}, \mathcal{G}_2 = \mathcal{G}_{a_0+\lambda v, a_0+\lambda w}$, die nach dem Strahlensatz (10.10) parallel sind. Nach (10.21) sind dann auch $F(\mathcal{G}_1)$ und $F(\mathcal{G}_2)$ parallel und die andere Richtung des Strahlensatzes (10.10) impliziert nun, daß

$$TV(a'_0, F(a_0 + \lambda v), F(a_0 + v)) = TV(a'_0, F(a_0 + \lambda w), F(a_0 + w))$$

gilt. Daraus folgt $f(\lambda, v) = f(\lambda, w)$.

2. Fall: Ist $w = \mu v$, so wählen wir ($\dim \mathcal{A} \geq 2$!) ein von v linear unabhängiges $z \in V$. Dann gilt mit zweifacher Anwendung des 1. Falls:

$$f(\lambda, v) = f(\lambda, z) = f(\lambda, \mu v) = f(\lambda, w)$$

(10.26) Folgerung. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist Körperautomorphismus, d.h. es gilt $f(1) = 1$ und für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(\lambda + \mu) &= f(\lambda) + f(\mu) \\ f(\lambda\mu) &= f(\lambda)f(\mu). \end{aligned}$$

Bew.: Wähle $v \in V \setminus \{0\}$. Da F injektiv ist, folgt $G(v) = \overrightarrow{F(a_0)F(a_0 + v)} \neq 0$.

(i) $G(v) = G(1 \cdot v) = f(1)G(v) \Rightarrow (f(1) - 1)G(v) = 0 \Rightarrow f(1) = 1$

(ii) $G((\lambda + \mu)v) = f(\lambda + \mu)G(v)$
$G((\lambda + \mu)v) = G(\lambda v + \mu v) \overset{(10.24)}{=} G(\lambda v) + G(\mu v) = (f(\lambda) + f(\mu))G(v)$
Diese Gleichungen beweisen $f(\lambda + \mu) = f(\lambda) + f(\mu)$.

(iii) $G((\lambda\mu)v) = f(\lambda\mu)G(v)$
$G((\lambda\mu)v) = G(\lambda(\mu v)) = f(\lambda)G(\mu v) = f(\lambda)f(\mu)G(v)$.
Diese Gleichungen beweisen $f(\lambda\mu) = f(\lambda)f(\mu)$.

Bisher wurde noch nicht benutzt, daß $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ reelle affine Räume sind. Das folgende Lemma aber wäre etwa für den Körper $\mathbb{C}$ (statt $\mathbb{R}$) nicht wahr.

(10.27) Lemma. Die Identität $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ ist der einzige Körperautomorphismus von $\mathbb{R}$.

Bew.: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Körperautomorphismus. Die Additivität von f und $f(1) = 1$ zeigen, daß $f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) = 1 + 1 = 2$ und – induktiv – daß $f(n) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt. Aus $f(0) + f(0) = f(0+0) = f(0)$ folgt $f(0) = 0$ und aus $f(n + (-n)) = 0 = f(n) + f(-n) = n + f(-n)$ für $n \in \mathbb{N}$ folgt $f(n) = n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Ist $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, so gilt

$$1 = f(1) = f\left(\frac{1}{n} \cdot n\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) f(n) = f\left(\frac{1}{n}\right) \cdot n,$$

also $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$. Verwenden wir nochmals die Multiplikativität von f, so erhalten wir $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}$ für alle $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Weiter gilt $f(\mathbb{R}_{\geq 0}) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$, denn aus $r \geq 0$ folgt

$$f(r) = f\left(\sqrt{r}^2\right) = \left(f(\sqrt{r})\right)^2 \geq 0.$$

Zusammen mit der Additivität von f ergibt das

$$r \geq s \Rightarrow f(r) \geq f(s),$$

d.h. f ist monoton wachsend. Ist schließlich $r \in \mathbb{R}$ beliebig, so wählen wir $x_i, y_i \in \mathbb{Q}$ mit $x_i \leq r \leq y_i$ und $\lim x_i = r = \lim y_i$. Dann folgt $x_i = f(x_i) \leq f(r) \leq f(y_i) = y_i$ und daraus

$$f(r) = \lim x_i = \lim y_i = r.$$

Aus (10.23)–(10.27) folgt, daß die durch

$$F(a_0 + v) = a_0' + G(v)$$

definierte Abbildung $G : V \to V'$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraumhomomorphismus ist. Das zeigt, daß F eine affine Abbildung ist, vgl. (10.12), 3). Da F als bijektiv vorausgesetzt wurde, ist F eine Affinität. Das beendet den Beweis des Fundamentalsatzes (10.20).

Weiteres zur affinen Geometrie findet man z.B. in den Büchern G. Fischer: Analytische Geometrie, Vieweg 1978, W. Klingenberg: Lineare Algebra und Geometrie, Springer 1990.

Nach dieser kurzen Einführung in die affine Geometrie wenden wir uns noch kürzer der euklidischen Geometrie zu. Die euklidische Geometrie ist für uns besonders anschaulich, weil sie (in Dimension 3) gerade die mathematische Präzisierung des uns umgebenden „Anschauungsraums“ ist.

(10.28) Def.: Ein euklidischer Raum $\mathcal{E} = \mathcal{E}(V, <,>)$ ist ein affiner Raum $\mathcal{E}$ über einem euklidischen (reellen!) Vektorraum $V, <,>$. Eine Isometrie von $\mathcal{E} = \mathcal{E}(V, <,>)$ auf $\mathcal{E}' = \mathcal{E}'(V', <,>')$ ist eine Affinität $F : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$, deren zugehörige lineare Abbildung $L_F : V \to V'$ orthogonal bzgl. $<,>$ und $<,>'$ ist, vgl. (6.8).

Bez.: $\mathrm{Iso}(\mathcal{E}) = \{F : \mathcal{E} \to \mathcal{E} \mid F \text{ Isometrie}\}$ ist bzgl. $\circ$ eine Gruppe, die „Isometriegruppe von $\mathcal{E}$“. Ein $F \in \mathrm{Iso}(\mathcal{E})$ heißt orientierungserhaltende Isometrie (oder eigentliche Bewegung), falls $L_F \in \mathrm{SO}(V)$ gilt.

Bem.: Zwei endlich-dimensionale euklidische Räume sind genau dann isometrisch, wenn sie die gleiche Dimension haben, vgl. (6.9). Das Standardbeispiel eines euklidischen Raums ist der $\mathbb{R}^n$ (nach (10.2) als affiner Raum aufgefaßt) mit dem Standardskalarprodukt $\langle v, w\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i w_i$.

Zwei Punkten a, b eines euklidischen Raums $\mathcal{E}$ ordnet man den Abstand $d(a, b)$ von a und b durch

$$d(a, b) := \|\overrightarrow{ab}\| = \langle\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ab}\rangle^{\frac{1}{2}}$$

zu. Aus Satz (6.3) folgen leicht die folgenden Eigenschaften des Abstands d:

(i) $d(a, b) \geq 0$ und $d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$.
(ii) $d(a, b) = d(b, a)$.
(iii) $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$ „Dreiecksgleichung".

Isometrien $F : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ lassen Abstände unverändert: Für alle $a, b \in \mathcal{E}$ gilt:

$$d'(F(a), F(b)) = \|\overrightarrow{F(a)F(b)}\|' = \|L_F(\overrightarrow{ab})\|' = \|\overrightarrow{ab}\| = d(a, b).$$

Sind $\mathcal{G}$ und $\mathcal{G}'$ orientierte Geraden in $\mathcal{E}$, die einander schneiden, so definiert man den Schnittwinkel $\varphi \in [0, \pi]$ von $\mathcal{G}$ und $\mathcal{G}'$ wie folgt: Man wählt positiv orientierte Richtungsvektoren v von $\mathcal{G}$ und v' von $\mathcal{G}'$ und setzt $\varphi = \sphericalangle(v, v') = \arccos \frac{\langle v, v'\rangle}{\|v\|'}$.

Ein affines Koordinatensystem $(a_1, \ldots, a_n)$ eines n-dimensionalen euklidischen Raums $\mathcal{E}$ heißt <u>kartesisch</u>, falls $\overrightarrow{a_0a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_0a_n}$ eine ONB von V ist. Die Abbildung, die jedem Punkt $x \in \mathcal{E}$ seinen Koordinatenvektor $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$ bzgl. eines festen kartesischen Koordinatensystems zuordnet, ist eine Isometrie von $\mathcal{E}$ auf das Standardbeispiel $\mathbb{R}^n$ eines euklidischen Raums. Speziell gilt dann

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2.$$

Man kann nun die Aussagen der euklidischen Geometrie, z.B. die der Schulgeometrie, mittels Vektorrechnung im euklidischen $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ beweisen. Dazu ein Beispiel:

(10.29) Satz. Die Höhen eines Dreiecks in einer euklidischen Ebene schneiden sich in einem Punkt.

Bew.: Seien A, B, C die Eckpunkte des Dreiecks und S der Schnittpunkt der Höhen durch die Eckpunkte A und B. Wir wollen zeigen, daß die Gerade $\mathcal{G}_{C,S}$ die Höhe durch die Ecke C ist, d.h. daß $\mathcal{G}_{C,S}$ die Gerade $\mathcal{G}_{A,B}$ senkrecht schneidet, d.h. daß

$$\langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CS}\rangle = 0$$

gilt.
Nun gilt, da $\mathcal{G}_{A,B}$ senkrecht auf $\mathcal{G}_{C,B}$ steht,

$$0 = \langle\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{CB}\rangle = \langle\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{CS} + \overrightarrow{SB}\rangle = \langle\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{CS}\rangle + \langle\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{SB}\rangle$$

und analog
$$0 = \langle \overrightarrow{BS}, \overrightarrow{CA} \rangle = \langle \overrightarrow{BS}, \overrightarrow{CS} + \overrightarrow{SA} \rangle = \langle \overrightarrow{BS}, \overrightarrow{CS} \rangle + \langle \overrightarrow{BS}, \overrightarrow{SA} \rangle.$$
Bildet man die Differenz dieser Gleichungen, so folgt
$$0 = \langle \overrightarrow{AS}, \overrightarrow{CS} \rangle - \langle \overrightarrow{BS}, \overrightarrow{CS} \rangle = \langle \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{CS} \rangle = \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CS} \rangle$$
wie behauptet.
Das folgende euklidische Analogon zum Fundamentalsatz der affinen Geometrie ist leichter zu beweisen.

(10.30) Satz. *Seien $\mathcal{E} = \mathcal{E}(V, \langle , \rangle)$ und $\mathcal{E}' = \mathcal{E}'(V', \langle , \rangle')$ euklidische Räume und $F : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ eine surjektive, abstandserhaltende Abbildung. Dann ist F eine Isometrie von $\mathcal{E}$ auf $\mathcal{E}'$.*

Bem.: Daß F abstandserhaltend ist, bedeutet, daß für alle $a, b \in \mathcal{E}$ gilt:
$$d'(F(a), F(b)) = d(a, b).$$
Bew.: Da F abstandserhaltend ist, ist F injektiv. Da F nach Voraussetzung surjektiv ist, ist F sogar bijektiv. Wir wählen $a_0 \in \mathcal{E}$, setzen $a_0' := F(a_0)$ und definieren $G : V \to V'$ durch
$$F(a_0 + v) = a_0' + G(v).$$
Wir müssen zeigen, daß $G \in \mathrm{Hom}(V, V')$ist ($\Rightarrow$ F ist Affinität und $G = L_F$), und daß für alle $v, w \in V$ gilt:

$$(*) \qquad \langle v, w \rangle = \langle G(v), G(w) \rangle'.$$

Zunächst gilt:

$$d(a_0+v, a_0+w) = \|w-v\| = d'(F(a_0+v), F(a_0+w)) = d'(a_0'+G(v), a_0'+G(w)) = \|G(w)-G(v)\|'.$$
Wegen $G(0) = 0$ folgt daraus speziell
$$\|G(v)\|' = \|v\| \quad \text{für alle } v \in V.$$

Damit folgt aus
$$\begin{array}{rclll} \|w-v\|^2 & = & \|w\|^2 & -2\langle w, v \rangle & +\|v\|^2 = \\ \|G(w) - G(v)\|'^2 & = & \|G(w)\|'^2 & -2\langle G(w), G(v) \rangle' & +\|G(v)\|'^2 \end{array}$$
daß $(*)$ gilt. Es bleibt $G \in \mathrm{Hom}(V, V')$ zu zeigen. Nun gilt für alle $v, w \in V$:
$$\begin{array}{lcl} (1)\ \ \|G(v+w)\|'^2 = \|v+w)\|^2 & = & \|v\|^2 + 2\langle v, w \rangle + \|w\|^2 \\ & = & \|G(v)\|'^2 + 2\langle G(v), G(w) \rangle' + \|G(w)\|'^2 = \|G(v) + G(w)\|'^2 \end{array}$$

und

$$\begin{array}{lrcl} (2) & \langle G(v+w), G(v) + G(w) \rangle' = \langle v+w, v \rangle + \langle v+w, w \rangle & = & \|v+w\|^2 \\ & & = & \|G(v+w)\|'^2. \end{array}$$

Mit Hilfe von (1) und (2) folgt
$$\begin{array}{rcl} \|G(v+w) - (G(v) + G(w))\|'^2 & = & \|G(v,w)\|'^2 - 2\langle G(v+w), G(v) + G(w) \rangle' + \|G(v) + G(w)\|'^2 \\ & = & 0, \end{array}$$

also $G(v + w) = G(v) + G(w)$.

Schließlich gilt für alle $\alpha \in \mathbb{R}$, $v \in V$:

$$\|G(\alpha v)\|'^2 = \|\alpha v\|^2 = \alpha^2 \|G(v)\|'^2$$

und

$$\langle G(\alpha v), \alpha G(v)\rangle' = \alpha \langle G(\alpha v), G(v)\rangle' = \alpha^2 \|v\|^2 = \alpha^2 \|G(v)\|'^2.$$

Die vorangehenden Gleichungen implizieren

$$\|G(\alpha v) - \alpha G(v)\|'^2 = \|G(\alpha v)\|'^2 - 2\alpha \langle G(\alpha v), G(v)\rangle' + \alpha^2 \|G(v)\|'^2 = 0,$$

also $G(\alpha v) = \alpha G(v)$.

Jede Isometrie F eines euklidischen Raums $\mathcal{E} = \mathcal{E}(V, \langle,\rangle)$ läßt sich bezüglich eines beliebigen Punktes $a_0 \in \mathcal{E}$ in der Form

$$F(a_0 + v) = F(a_0) + L_F(v)$$

mit $L_F \in O(V)$ darstellen. Untersucht man F nach Fixpunkten, invarianten Geraden u.s.w., so kann man Darstellungen von F finden, die mehr über F aussagen. Wir begnügen uns mit dem einfachsten Fall.

(10.31) Satz. Sei $\mathcal{E} = \mathcal{E}(V, \langle,\rangle)$ eine euklidische Ebene und $F \in \mathrm{Iso}(\mathcal{E})$ orientierungserhaltend. Dann ist F entweder eine Translation ($\Leftrightarrow L_F = \mathrm{id}_V$) oder eine Drehung um einen Punkt $a \in \mathcal{E}$ ($\Leftrightarrow F(a+v) = a + D(v)$) mit $D \in \mathrm{SO}(V) \setminus \{\mathrm{id}_V\}$).

Bew.: Ist F keine Translation, so gilt $L_F =: D \in \mathrm{SO}(V) \setminus \{\mathrm{id}_V\}$. Wir suchen einen Fixpunkt $a \in \mathcal{E}$ von F, denn dann gilt $F(a+v) = a + D(v)$ für alle $v \in V$. Sei $a_0 \in \mathcal{E}$ beliebig. Wir suchen $w \in V$, so daß

$$(*) \qquad F(a_0 + w) = F(a_0) + D(w) = a_0 + w$$

gilt. Das ist äquivalent zu

$$w - D(w) = \overrightarrow{a_0 F(a_0)} =: z.$$

Da $\det(\mathrm{id}_V - D) = \begin{vmatrix} 1-\cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & 1-\cos\varphi \end{vmatrix} \neq 0$ gilt (vgl. den Beweis von (6.24)'), ist $\mathrm{id}_V - D : V \to V$ surjektiv. Also existiert $w \in V$ mit $w - D(w) = z$, d.h. $(*)$ gilt für dieses w. Damit ist $a := a_0 + w \in \mathcal{E}$ Fixpunkt von F.