Kapitel 3: Vektorräume

(3.1) Def.: Ein Vektorraum über einem Körper K ist eine abelsche Gruppe $(V, +)$ zusammen mit einer Abbildung $K \times V \to V$, $(\alpha, v) \in K \times V \mapsto \alpha v$, so daß für alle $\alpha, \beta \in K$ und alle $v, w \in V$ gilt:

(i) $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v \quad (=: \alpha\beta v)$
(ii) $(\alpha + \beta)v = (\alpha v) + (\beta v) \quad (=: \alpha v + \beta v)$
(iii) $\alpha(v + w) = (\alpha v) + (\alpha w) \quad (=: \alpha v + \alpha w)$
(iv) $1v = v$ (, wobei 1 das Einselement von K bezeichnet!)

Sprechweisen und Bezeichnungen:
"Punkt vor Strich" $\alpha v + \beta w := (\alpha v) + (\beta w)$, außerdem: $v - w := v + (-w)$
Vektorraum über einem Körper K = K-Vektorraum

Das neutrale Element von $(V, +)$ wird (zunächst) mit $\underline{0}$ bezeichnet, zur Unterscheidung vom neutralen Element 0 von $(K, +)$.

Elemente von V werden "Vektoren" (des Vektorraums V) genannt, Elemente des Körpers werden auch "Skalare" genannt.

Beispiele:

1) $K := \mathbb{R}$ und $V := \mathbb{R}^n$ mit den vor (1.15) eingeführten Operationen
$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$
$$r(x_1, \ldots, x_n) := (rx_1, \ldots, rx_n).$$
In diesem Fall $\underline{0} = (0, \ldots, 0)$
2) Allgemeiner: Sei K beliebiger Körper, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Dann können wir genau wie in Beispiel 1) die Menge
$$K^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \in K, \ldots, x_n \in K\}$$
zu einem Vektorraum über dem Körper K machen.
3) Sei I ein <u>homogenes</u> lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$ und Koeffizienten $a_{11}, \ldots, a_{mn}$ in K. Dann bildet die Lösungsmenge
$$L_I = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n \mid x \text{ löst } I\}$$
mit den wie in 1) definierten Operationen einen K-Vektorraum, vgl. (1.15).
4) Sei $K := \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$ eine Menge und $V = \{f \mid f : M \to \mathbb{R}\}$.

Für $r \in \mathbb{R}$, $f, g \in V$ definieren wir $f + g \in V$ und $rf \in V$ durch

(a) $\forall x \in M : (f + g)(x) := f(x) + g(x)$
(b) $\forall x \in M : (rf)(x) := rf(x)$
Mit diesen Operationen ist V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum (wobei $\underline{0} \in V$ die Abbildung ist, die jedes $x \in M$ auf $0 \in \mathbb{R}$ abbildet).

Wir beweisen exemplarisch, daß (3.1)(iii) gilt:
Seien $f, g \in V$, $r \in \mathbb{R}$. Zu zeigen ist:

$$(*) \qquad r(f+g) = rf + rg$$

Auf beiden Seiten von $(*)$ stehen Abbildungen von M nach $\mathbb{R}$. Wir haben also zu zeigen, daß für alle $x \in M$ gilt:

$$(r(f+g))(x) = (rf+rg)(x)$$

Wendet man auf beide Seiten (a) und (b) an (auf der linken Seite zunächst (b) dann (a)), so erhält man für die linke Seite

$$(r(f+g)(x)) \overset{\text{(b)}}{=} r((f+g)(x)) \overset{\text{(a)}}{=} r(f(x)+g(x))$$

und für die rechte Seite

$$(rf+rg)(x) \overset{\text{(a)}}{=} (rf)(x) + (rg)(x) \overset{\text{(b)}}{=} rf(x) + rg(x)$$

Schließlich gilt $r(f(x)+g(x)) = rf(x) + rg(x)$ aufgrund des Distributivgesetzes für die reellen Zahlen.