(3.15) Austauschlemma. Sei $B = \{v_1 \dots, v_n\}$ eine Basis von V mit n Elementen und $w \in V \setminus \{0\}$. Dann existiert $j \in \{1, \dots, n\}$, so daß $B' = (B \setminus \{v_j\}) \cup \{w\}$ Basis von V ist.

Bew.: Wegen $\operatorname{span}(B) = V$ existieren $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$, so daß

$$(*) \qquad w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

gilt. Da $w \neq 0$ ist, existiert ein j, $1 \leq j \leq n$ mit $\alpha_j \neq 0$. Wir zeigen, daß <u>für jedes solche</u> j gilt: $B' = (B \setminus \{v_j\}) \cup \{w\} = \{v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j-1}, \dots, v_n, w\}$ ist Basis.

Zunächst gilt $v_j \in \operatorname{span}(B')$, da aus $(*)$ folgt

$$v_j = \frac{1}{\alpha_j} \left(w - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \alpha_i v_i \right) = \frac{1}{\alpha_j} w + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \left(\frac{-\alpha_i}{\alpha_j} \right) v_i$$

und die rechte Seite ist eine Linearkombination von Elementen von B'.

Nach (3.11)(i) folgt

$$\operatorname{span}(B') \overset{(3.11)(i)}{=} \operatorname{span}(B' \cup \{v_j\}) = \operatorname{span}(B \cup \{w\}) \overset{(3.11)(i)}{=} \operatorname{span}(B) = V,$$

d.h. B' ist Erzeugendensystem von V. Um die lineare Unabhängigkeit von B' zu zeigen, nehmen wir an, daß für $\beta \in K$, $\beta_1, \dots, \beta_{j-1}, \beta_{j+1}, \dots, \beta_n \in K$ gilt:

$$(**) \qquad \beta w + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \beta_i v_i = \underline{0}$$

Mit $(*)$ folgt

$$\beta \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \beta_i v_i = \underline{0},$$

also

$$\beta \alpha_j v_j + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} (\beta \alpha_i + \beta_i) v_i = \underline{0}.$$

Da $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ linear unabhängig ist, folgt aus der vorangehenden Gleichung $\beta \alpha_j = 0$ und $\beta \alpha_i + \beta_i = 0$ für alle $i \neq j$. Da wir j so gewählt hatten, daß $\alpha_j \neq 0$ ist, folgt $\beta = 0$ und daraus $\beta_i = 0$ für alle $i \neq j$. Damit haben wir gezeigt, daß in $(**)$ alle Koeffizienten β und β_i für $i \neq j$ gleich 0 sind, d.h. B' ist linear unabhängig.

(3.16) Austauschsatz von Steinitz. *Sei $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V mit n Elementen und seien $w_1, \dots, w_m$ m linear unabhängige Vektoren in V. Dann gilt*

(i) $m \leq n$

(ii) *Es gibt* $(n-m)$ *Vektoren in* B*, bei geeigneter Numerierung* $v_{m+1}, \ldots, v_n$*, so daß* $\{w_1, \ldots, w_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\}$ *eine Basis von* V *ist.*

Speziell gilt: Jede Basis von V *hat* n *Elemente.*

Bew.: Induktion nach m.
1) $m = 1$. $\underline{0} \neq w_1 \in V \Rightarrow V \neq \{0\} \Rightarrow n \geq 1 = m \Rightarrow$ (i). (ii) folgt aus (3.15).
2) $m > 1$. Induktionsvoraussetzung: (i) und (ii) gelten für $m-1$. Seien $w_1, \ldots, w_m$ linear unabhängig gegeben. Die Induktionsvoraussetzung impliziert: $(m-1) \leq n$ und es existieren $n-m+1$ Vektoren in B, o.E. $v_m \ldots, v_n$, so daß $\{w_1, \ldots, w_{m-1}, v_m \ldots, v_n\}$ eine Basis von V ist.

Zeige (i): $m \leq n$. Sonst gilt nach der vorangehenden Überlegung $m-1 = n$ und die Menge $\{w_1, \ldots, w_{m-1}\}$ ist Basis von V $(n-m+1 = 0!)$, im Widerspruch zur Voraussetzung, daß $\{w_1, \ldots, w_m\}$ linear unabhängig ist. Das beweist $m \leq n$.

Zeige (ii): Wir wollen in der Basis $\{w_1, \ldots, w_{m-1}, v_m, \ldots, v_n\}$ eines der v_i, $m \leq i \leq n$, gegen w_m "austauschen" und zwar so, daß wieder eine Basis entsteht.
Da $\operatorname{span}\{w_1, \ldots, w_{m-1}, v_m, \ldots, v_n\} = V$ gilt, existieren $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$, so daß

$$w_m = \alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_{m-1} w_{m-1} + \alpha_m v_m + \ldots + \alpha_n v_n$$

gilt. Da $\{w_1, \ldots, w_m\}$ linear unabhängig ist, existiert ein $j \in \{m, \ldots, n\}$ mit $\alpha_j \neq 0$. Wir können annehmen, daß $j = m$ ist. Wendet man das Austauschlemma (3.15) (vgl. auch den Anfang des Beweises von (3.15)!) auf $w := w_m$ und die Basis $\{w_1, \ldots, w_{m-1}, v_m, \ldots, v_n\}$ an, so folgt, daß $\{w_1, \ldots, w_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V ist. Das beweist (ii).

(3.17) Def.: Ist V endlich erzeugter Vektorraum, so heißt die Anzahl der Elemente einer ($\Rightarrow$ jeder) Basis von V die Dimension von V (abgekürzt: $\dim V$).

Ist V nicht endlich erzeugt, so setzen wir $\dim V := \infty$.

Beispiele:

1) $V = \{\underline{0}\} \Leftrightarrow \dim V = 0$ (mit Basis $M = \emptyset$)
2) Für den K-Vektorraum K^n gilt: $\dim(K^n) = n$
   Begründung: Die Standardbasis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ von K^n hat n Elemente.
3) $V = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, vgl. Bsp. 4) nach (3.1). Für diesen $\mathbb{R}$-Vektorraum gilt $\dim V = \infty$, vgl. Blatt 6, Aufgabe 4(b).

Bem.: V endlich erzeugt $\Leftrightarrow$ V endlich-dimensional.

(3.18) Folgerungen. Sei V Vektorraum, $\dim V = n < \infty$. Dann gilt:

(i) Ist $M \subseteq V$ linear unabhängig, so gilt $\#M \leq n$, und es gilt $\#M = n$ genau dann, wenn M Basis von V ist.
(ii) Ist $M \subseteq V$ Erzeugendensystem von V, so gilt $\#M \geq n$, und es gilt $\#M = n$ genau dann, wenn M Basis von V ist.

(iii) Ist $U \subseteq V$ Unterraum, so gilt $\dim U \leq \dim V$. Jede Basis von U ist in einer Basis von V enthalten. Es gilt genau dann $\dim U = \dim V$, wenn $U = V$ gilt.

Lösung von Blatt 5, Aufgabe 3: Sei U Unterraum des $\mathbb{R}^2$ mit $\{(0,0)\} \neq U \neq \mathbb{R}^2$. Dann existiert $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, so daß $U = \{rv \mid r \in \mathbb{R}\}$.

Bew.: Es gilt $0 < \dim U < 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$, also $\dim U = 1$. Sei $\{v\}$ Basis von $U \Rightarrow$ Beh.

Beweis von (3.18):

(i) (3.16)(i) $\Rightarrow \#M \leq n$. Speziell: Ist $\#M = n$, so ist M (im Sinne von (3.12)!) eine maximale linear unabhängige Teilmenge, also nach (3.12) eine Basis.
(ii) Analog zu (i).
(iii) Ist B' Basis von U, so ist B' als Teilmenge von V linear unabhängig, also $\dim U = \#B' \leq n = \dim V$ nach (i). Aus (3.16)(ii) folgt, daß B' in einer Basis von V enthalten ist. Gilt $\dim U = \dim V$, so ist nach (i) jede Basis B' von U auch Basis von V, d.h. $U = \operatorname{span}(B') = V$.

(3.19) Def.: Seien U_1, U_2 Unterräume eines Vektorraums V. Dann heißt der Unterraum

$$U_1 + U_2 := \operatorname{span}(U_1 \cup U_2)$$

die Summe von U_1 und U_2. Gilt $U_1 \cap U_2 = \{\underline{0}\}$, so nennt man $\operatorname{span}(U_1 \cup U_2)$ die direkte Summe von U_1 und U_2 und schreibt

$$\operatorname{span}(U_1 \cup U_2) =: U_1 \oplus U_2$$

Bsp.: Für $0 < m < n$ gilt: $K^n = (K^m \times \{\underline{0}\}) \oplus (\{\underline{0}\} \times K^{n-m})$

(3.20) Fakt. (i) $U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$
(ii) Gilt $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, so existieren für jedes $v \in U_1 \oplus U_2$ genau zwei Vektoren $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$, so daß $v = u_1 + u_2$ gilt.

Bsp.: 1) $V = \mathbb{R}^2$, U_1, U_2 Unterräume der Dimension 1, $U_1 \neq U_2$. Dann: $U_1 \cap U_2 = \{(0,0)\}$, $U_1 \oplus U_2 = \mathbb{R}^2$.
2) $V = \mathbb{R}^3$, $U_1 \neq U_2$ Unterräume der Dimension 2. Dann: $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$, $U_1 + U_2 = \mathbb{R}^3$.

Beweis: Die Menge $\{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$ ist Unterraum (!), der U_1 und U_2 enthält, also $\operatorname{span}(U_1 \cup U_2) \subseteq \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$, vgl. Def. (3.6).
Die Inklusion $\{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\} \subseteq \operatorname{span}(U_1 \cup U_2)$ ist klar!

Gilt $v = u_1 + u_2 = u_1' + u_2'$ mit $\{u_1, u_1'\} \subseteq U_1$, $\{u_2, u_2'\} \subseteq U_2$, so folgt

$$u_1 - u_1' = u_2' - u_2 \in U_1 \cap U_2 = \{\underline{0}\}, \text{ also } u_1 = u_1', u_2 = u_2'.$$

(3.21) Lemma.

(i) Ist U Unterraum von V, so existiert ein Unterraum W von V, so daß $U \cap W = \{\underline{0}\}$ und $U \oplus W = V$ gilt.
(W heißt ein zu U komplementärer Unterraum)

(ii) Sind U_1, U_2 Unterräume von V mit $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, so gilt

$$\dim(U_1 \oplus U_2) = \dim U_1 + \dim U_2.$$

Bem.: Im allgemeinen gibt es sehr viele zu U komplementäre Unterräume. Beispiel: Es sei $U = \mathbb{R} \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ und es sei $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ und $v_2 \neq 0$. Dann ist $W = \operatorname{span}\{v\}$ zu U komplementär.

Bew.: (i) Ergänze eine Basis B' von U nach (3.18)(iii) zu einer Basis B von V und setze $W := \operatorname{span}(B \setminus B')$.
(ii) Für $i = 1, 2$ seien B_1, B_2 Basen von U_1, U_2. Aus $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ folgt $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Wir zeigen, daß $B_1 \cup B_2$ Basis von $U_1 \oplus U_2$ ist ($\Rightarrow \dim(U_1 \oplus U_2) = \#(B_1 \cup B_2) = \#B_1 + \#B_2 = \dim U_1 + \dim U_2$). Wegen (3.20)(i) ist $B_1 \cup B_2$ Erzeugendensystem von $U_1 \oplus U_2$. Um zu zeigen, daß $B_1 \cup B_2$ linear unabhängig ist, sei

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i + \sum_{j=1}^{l} \beta_j w_j = \underline{0},$$

wobei $\alpha_1, \ldots, \beta_l \in K$, $v_1, \ldots, v_k$ verschiedene Elemente von B_1, $w_1, \ldots, w_l$ verschiedene Elemente von B_2 sind. Dann folgt

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = \sum_{j=1}^{l} (-\beta_j) w_j \in U_1 \cap U_2.$$

Wegen $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ folgt

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = \underline{0} = \sum_{j=1}^{l} (-\beta_j) w_j.$$

Da B_1 und B_2 beide linear unabhängig sind, folgt aus den vorangehenden Gleichungen $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$ und $\beta_1 = \ldots = \beta_l = 0$. Das beweist die lineare Unabhängigkeit von $B_1 \cup B_2$.

Bem.: (3.21)(ii) gilt – richtig interpretiert – auch für den Fall, daß U_1 oder U_2 unendlich-dimensional sind. Für den Rest des Kapitels werden wir aber $\underline{\dim V < \infty}$ voraussetzen.

(3.22) Dimensionssatz. *Seien U_1, U_2 Unterräume eines Vektorraums V. Dann gilt*

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$$

Bew.: $U_1 \cap U_2 =: U_{12}$. Nach (3.21)(i) existieren Unterräume W_1(von $U_1 \Rightarrow$ von V) und W_2, so daß $U_1 = U_{12} \oplus W_1$ und $U_2 = U_{12} \oplus W_2$ gilt. Dann folgt

$$(*) \qquad U_1 + U_2 = (U_{12} \oplus W_1) \oplus W_2$$

Denn einerseits läßt sich jedes Element $v \in U_1 + U_2$ als

$$v = u_1 + u_2 = u_{12} + w_1 + u'_{12} + w_2 = (u_{12} + u'_{12}) + w_1 + w_2$$

mit $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$, $u_{12}, u'_{12} \in U_{12}$, $w_1 \in W_1$ und $w_2 \in W_2$ schreiben und andererseits gilt $(U_{12} \oplus W_1) \cap W_2 = U_1 \cap (U_2 \cap W_2) = U_{12} \cap W_2 = \{\underline{0}\}$.

Nach (3.21)(ii) folgt aus $(*)$: $\dim(U_1+U_2) = \dim U_{12} + \dim W_1 + \dim W_2$, und aus $U_1 = U_{12} \oplus W_1$, $U_2 = U_{12} \oplus W_2$:

$$\begin{aligned} \dim U_1 &= \dim U_{12} + \dim W_1 \\ \dim U_2 &= \dim U_{12} + \dim W_2 \end{aligned}$$

Subtrahiert man diese beiden Gleichungen von der vorangehenden, so folgt

$$\dim(U_1+U_2) - \dim U_1 - \dim U_2 = -\dim U_{12}$$

oder

$$\dim(U_1+U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim U_{12},$$

wie behauptet.

Bez.: Ein Unterraum $H \subseteq V$ heißt Hyperebene, falls $\dim H = \dim V - 1$ gilt.

(3.23) Folgerung. Ist $U \subseteq V$ Unterraum, $H \subseteq V$ Hyperebene, so gilt entweder

$$\dim(U \cap H) = \dim U - 1$$

$$\text{oder} \quad U \subseteq H (\Leftrightarrow U = U \cap H \Leftrightarrow \dim(U \cap H) = \dim U).$$

Bew.: Aus (3.22) folgt

$$(*) \qquad \dim(U \cap H) = \dim U + (\dim V - 1) - \dim(U+H).$$

Gilt $\dim(U+H) < \dim V$, so folgt aus (3.18)(iii) angewendet auf $H \subseteq U+H$, daß $H = U+H$, d.h. $U \subseteq H$ gilt. Gilt $\dim(U+H) = \dim V$, so folgt aus $(*)$: $\dim(U \cap H) = \dim U - 1$.

(3.24) Lemma. Ist K ein Körper und sind $a_1, \ldots, a_n \in K$ nicht alle $= 0$, so ist der Lösungsraum $L_I \subseteq K^n$ der Gleichung

$$I \qquad a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$$

eine Hyperebene in K^n.

Bew.: Sei etwa $a_j \neq 0$. Dann folgt durch Auflösen von I nach x_j:

$$L_I = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \left(-\frac{a_i}{a_j}\right) x_i\}.$$

Wir definieren für $i \neq j$ die Vektoren $v_i = e_i - \frac{a_i}{a_j} e_j \in K^n$. Dann gilt

$$L_I = \operatorname{span}\{v_i \mid i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j\}\}.$$

Da die Vektoren $v_i, i \neq j$, linear unabhängig sind (!), folgt $\dim L_I = n - 1$.

(3.25) Satz. Sei K ein Körper und

$$I \qquad \begin{matrix} a_{11} & x_1 + \ldots + & a_{1n} & x_n = 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & x_1 + \ldots + & a_{kn} & x_n = 0 \end{matrix}$$

ein homogenes lineares Gleichungssystem mit $a_{ij} \in K$ für $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq n$. Dann gilt $\dim L_I \geq n - k$.

Beweis: Induktion nach k.
$k = 1$: Nach (3.24) ist der Lösungsraum $L_I \subseteq K^n$ einer einzigen linearen Gleichung $(n-1)$-dimensional, es sei denn, alle Koeffizienten der Gleichung sind 0 (und in diesem Fall gilt $L_I = K^n$). In jedem Fall gilt $\dim L_I \geq n - 1$.

$k > 1$: Es sei I' das Gleichungssystem, das aus den ersten $(k-1)$ Gleichungen von I besteht, und I_k sei die k'te (=letzte) Gleichung von I. Dann gilt

$$L_I = L_{I'} \cap L_{I_k}$$

Die Induktionsvoraussetzung besagt: $\dim L_{I'} \geq n - k + 1$. Sind alle Koeffizienten von I_k gleich 0, so gilt $L_{I_k} = K^n$, also $L_I = L_{I'}$ und damit $\dim L_I = \dim L_{I'} \geq n - k + 1 > n - k$. Sind nicht alle Koeffizienten von I_k gleich 0, so ist L_{I_k} nach (3.24) eine Hyperebene.
Dann folgt aus (3.23), angewendet auf $U = L_{I'}$, $H = L_{I_k}$:
$\dim L_I = \dim(L_{I'} \cap L_{I_k}) \geq \dim(L_{I'}) - 1 \geq n - k$.

Bez.: Eine Teilmenge A von V heißt $\underline{k\text{-dimensionaler}}$ affiner Unterraum, falls es ein $v \in V$ und einen k-dimensionalen Unterraum $U \subseteq V$ gibt, so daß $A = \{v + u \mid u \in U\} =: v + U$ gilt. Ist $k = 1$, so nennt man A eine affine Gerade, ist $k = 2$, eine affine Ebene und ist $k = \dim V - 1$, eine affine Hyperebene.

Bem.: Ein affiner Unterraum A von V ist genau dann ein Unter(vektor)raum von V, wenn $\underline{0} \in A$ gilt. Sind v_0, $v_1 \in V$ und sind U_0, U_1 Unterräume von V, so gilt $v_0 + U_0 = v_1 + U_1$ genau dann, wenn $U_0 = U_1$ und $v_1 - v_0 \in U_0$ gilt.

(3.26) Folgerung. Sei K ein Körper und I ein inhomogenes lineares Gleichungssystem mit k Gleichungen für n Unbekannte. Dann gilt entweder $L_I = \emptyset$ oder L_I ist ein affiner Unterraum von K^n der Dimension $\geq n - k$. Insbesondere besitzt I höchstens dann genau eine Lösung (d.h. $\#L_I = 1$), wenn $k \geq n$ gilt.

Bew.: Die Behauptung folgt durch Kombination von (1.6) mit (3.25).

Bem.: Die Aussagen von (3.25) und (3.26) kann man auch direkt mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren einsehen.