(3.2) Rechenregeln. Für alle $\alpha \in K$, $v \in V$ gilt

(i) $0v = \underline{0}$, $\alpha\underline{0} = \underline{0}$
(ii) $\alpha v = \underline{0} \Rightarrow \alpha = 0$ oder $v = \underline{0}$
(iii) $(-\alpha)v = \alpha(-v) = -(\alpha v) \quad (=: -\alpha v)$

Bew.:

(i) $0v = 0v + (v - v) = (0v + 1v) - v = (0+1)v - v = 1 \cdot v - v = v - v = \underline{0}$
$\alpha\underline{0} = \alpha\underline{0} + (\alpha\underline{0} - \alpha\underline{0}) = \alpha(\underline{0} + \underline{0}) - \alpha\underline{0} = \alpha\underline{0} - \alpha\underline{0} = \underline{0}$
(ii) Sei $\alpha v = \underline{0}$ und $\alpha \neq 0 \overset{(i)}{\Rightarrow} \alpha^{-1}(\alpha v) = \underline{0} \Rightarrow (\alpha^{-1}\alpha)v = \underline{0} \Rightarrow 1v = \underline{0} \Rightarrow v = \underline{0}$
(iii) $(-\alpha)v + \alpha v = ((-\alpha) + \alpha)v = 0v \overset{(i)}{=} \underline{0} \Rightarrow (-\alpha)v = -(\alpha v)$
$\alpha(-v) + \alpha v = \alpha((-v) + v) = \alpha\underline{0} \overset{(i)}{=} \underline{0} \Rightarrow \alpha(-v) = -(\alpha v)$

(3.3) Def.: Sei V K-Vektorraum und $U \subseteq V$. U heißt Unter(vektor)raum von V, falls

(i) $U \neq \emptyset$
(ii) $v_1, v_2 \in U \Rightarrow v_1 + v_2 \in U$
(iii) $\alpha \in K$, $v \in U \Rightarrow \alpha v \in U$

(3.4) Folgerung: Sei V K-Vektorraum, $U \subseteq V$ Unterraum. Dann ist U (mit den von V auf U eingeschränkten Strukturen) ein K-Vektorraum.

Bew.: Sei U Unterraum.

(i) $\Rightarrow +$ ist innere Verknüpfung auf $U (\Rightarrow (G_1))$.
(ii) $\Rightarrow$ die Multiplikation mit Skalaren ist eine Abbildung $K \times U \to U$.

Wir zeigen: $(U, +)$ ist abelsche Gruppe: $v \in U \overset{(ii)}{\Rightarrow} (-1)v \in U \overset{(3.2)(iii)}{\Rightarrow} -v \in U$

$U \neq \emptyset \Rightarrow \exists v \in U \Rightarrow v$ und $-v \in U \overset{(ii)}{\Rightarrow} v + (-v) = \underline{0} \in V$
Daraus folgen $(G_2), (G_3)$ für $(U, +)$, (G_1) für $(U, +)$ folgt aus (G_1) für $(V, +)$. Die anderen Eigenschaften sind offensichtlich erfüllt.

Beispiele:

1) $\{0\}$ und V sind Unterräume von V
2) Ist $m < n$, so ist $K^m \times \{\underbrace{(0, \ldots, 0}_{(n-m)-\text{mal}}\} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in K^n \mid x_{m+1} = \ldots = x_n = 0\}$ Unterraum von K^n
3) Ist I homogenes lineares Gleichungssystem für n Unbekannte mit Koeffizienten a_{ij} in K, so ist L_I Unterraum von K^n, vgl. (1.15).
4) $V = \{f \mid f : M \to \mathbb{R}\}$, vgl. Bsp. 4) nach (3.1). Zu festem $a \in M$ sei $U = \{f \in V \mid f(a) = 0\}$. Dann ist U Unterraum von V.

(3.5) Fakt. Ist V ein K-Vektorraum und $\mathcal{U}$ eine Menge von Unterräumen von K, so ist $W := \bigcap\limits_{U \in \mathcal{U}} U$ Unterraum von V.

Bew.: $\forall U \in \mathcal{U} : \underline{0} \in U \Rightarrow \underline{0} \in W$
$v_1, v_2 \in W \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U} : v_1, v_2 \in U \overset{(3.3)(\mathrm{ii})}{\Rightarrow} \forall U \in \mathcal{U} : v_1 + v_2 \in U \Leftrightarrow v_1 + v_2 \in W$
Ebenso: $\alpha \in K$, $v \in W \Rightarrow \alpha v \in W$.

(3.6) Def.: Sei V K-Vektorraum, $M \subseteq V$. $\mathcal{U}_M := \{U \mid U \text{ Unterraum von } V \text{ mit } M \subseteq U\}$

Dann heißt $\operatorname{span}(M) := \bigcap\limits_{U \in \mathcal{U}_M} U$ der von M aufgespannte (oder erzeugte) Unterraum. M heißt Erzeugendensystem von V, falls $\operatorname{span}(M) = V$ gilt. V heißt endlich erzeugt, falls es eine endliche Menge $M \subseteq V$ gibt mit $\operatorname{span}(M) = V$.

Bem.: (3.5) $\Rightarrow$ $\operatorname{span}(M)$ ist Unterraum von V, der (bzgl. der Inklusion) kleinste, M enthaltende Unterraum.

Bsp.:

1) $M = \emptyset$ oder $M = \{\underline{0}\} \Rightarrow \operatorname{span}(M) = \{\underline{0}\}$
2) Ist M Unterraum von V, so $\operatorname{span}(M) = M$

(3.7) Satz. *Sei V K-Vektorraum, $\emptyset \neq M \subseteq V$. Dann gilt:*

$$\operatorname{span}(M) = \{v \in V \mid \exists k \in \mathbb{N}, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in K, v_1, \ldots, v_k \in M : v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k\}$$

Bez.: $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k$ heißt eine Linearkombination der Vektoren $v_1, \ldots, v_k$.
abgekürzt: $\alpha_1 v_1 + \alpha_s v_2 + \ldots + \alpha_k v_k = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$

Bew.: Wir bezeichnen die Menge auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in (3.7) durch U_0.
1) Zeige U_0 ist Unterraum von V. Wegen $M \neq \emptyset$ gilt $U_0 \neq \emptyset$. Seien $v, w \in U_0$, $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k$, $w = \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_j w_j$ mit $\alpha_1, \ldots, \beta_j \in K, v_1, \ldots, w_j \in M$. Dann gilt $v + w = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k + \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_j w_j \in U_0$.

Sei $\alpha \in K, v = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i v_i \in U_0$ mit $v_i \in M$. Dann gilt

$$\alpha v = \alpha(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k) = \alpha(\alpha_1 v_1) + \ldots + \alpha(\alpha_k v_k) = (\alpha\alpha_1)v_1 + \ldots + (\alpha\alpha_k)v_k \in U_0.$$

(Kürzer: $\alpha \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha\alpha_i v_i$).
Also ist U_0 ein M enthaltender Unterraum. Nach Definition (3.6) folgt $\operatorname{span}(M) \subseteq U_0$.
2) Zeige $U_0 \subseteq \operatorname{span}(M)$. Seien $v_1, \ldots, v_k \in M$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in K$. Da $\operatorname{span}(M)$ Unterraum ist, folgt nach (3.3)(iii): $\alpha_1 v_1 \in \operatorname{span}(M), \ldots, \alpha_k v_k \in \operatorname{span}(M)$, und nach (3.3)(ii) $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in$

$\operatorname{span}(M)$, $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) + \alpha_3 v_3 \in \operatorname{span}(M)$, u.s.w. bis

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k \in \operatorname{span}(M).$$

Also $U_0 \subseteq \operatorname{span}(M)$.

Bsp.: Betrachte K^n und $e_1 := (1, 0, \ldots, 0) \in K^n$, $e_2 := (0, 1, 0, \ldots, 0) \in K^n$, ..., $e_n = (0, \ldots, 0, 1) \in K^n$. Dann ist $M = \{e_1, \ldots, e_n\}$ Erzeugendensystem für K^n. Es genügt, $K^n \subseteq \operatorname{span}(M)$ zu zeigen. Ist $x = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$, so gilt $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n \in \operatorname{span}(M)$.

(3.8) Def.: Die Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ heißen <u>linear unabhängig</u>, falls gilt: Ist $\alpha_1 \in K, \ldots, \alpha_k \in K$ und $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = \underline{0}$, so folgt $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$. Sonst heißen die Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ linear abhängig. Eine Teilmenge M von V heißt linear unabhängig, falls gilt: Ist $k \in \mathbb{N}$ und sind $v_1, \ldots, v_k$ verschiedene Vektoren in M, so sind die $v_1, \ldots, v_k$ linear unabhängig. Sonst heißt M linear abhängig.

Bem.: $v_1, \ldots, v_k$ linear abhängig $\Leftrightarrow \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in K$ <u>nicht</u> <u>alle</u> $= 0$:

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = \underline{0}$$

Bsp.:

1) $\underline{0} \in M \Rightarrow M$ linear abhängig. Denn: $1 \cdot \underline{0} = \underline{0}$.
2) $M = \{v\}$ linear unabhängig $\Leftrightarrow v \neq 0$. Denn: $\alpha v = \underline{0}, v \neq \underline{0} \overset{(3.2)(\mathrm{ii})}{\Rightarrow} \alpha = 0$.
3) Sei $M \subseteq M' \subseteq V$. Dann: M linear abhängig $\Rightarrow$ M' linear abhängig
   M' linear unabhängig $\Rightarrow$ M linear unabhängig
4) $e_1, \ldots, e_n$ sind linear unabhängig in K^n. Denn:
   $x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n = (x_1, \ldots, x_n) = \underline{0} \Leftrightarrow x_1 = \ldots = x_n = 0$.
5) $V = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$. Die Funktion $x \to \sin x$ und $x \to \cos x$ sind linear unabhängig. Seien $r, s \in \mathbb{R}$ und $r \sin x + s \cos x = 0$ <u>für alle</u> $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt das speziell für $x = 0$ und $x = \frac{\pi}{2}$, d.h.

$$\begin{aligned} r \underbrace{\sin 0}_{=0} + s \underbrace{\cos 0}_{=1} = 0 \quad &\Rightarrow \quad s = 0 \\ r \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} + s \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} = 0 \quad &\Rightarrow \quad r = 0. \end{aligned}$$

(3.9) Fakt. Die Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ seien linear unabhängig. Dann gilt:

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_k v_k \Rightarrow \alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_k = \beta_k$$

Bew.: Voraussetzung $\Rightarrow (\alpha_1 - \beta_1) v_1 + (\alpha_2 - \beta_2) v_2 + \ldots + (\alpha_k - \beta_k) v_k = \underline{0}$
$\overset{\text{l. unabh.}}{\Rightarrow} \alpha_1 - \beta_1 = 0, \ldots, \alpha_k - \beta_k = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_k = \beta_k$.

(3.10) Def.: Eine Teilmenge M von V heißt <u>Basis von</u> V, falls M linear unabhängig und ein Erzeugendensystem von V ($\Leftrightarrow \operatorname{span}(M) = V$) ist.

Bsp.: $\{e_1, \dots, e_n\} \subseteq K^n$ ist Basis von K^n, die "Standardbasis von K^n".

Eine Beispielrechnung zur linearen Unabhängigkeit von Vektoren:

Wir fragen, ob die Vektoren $(1,0,1),(0,1,1),(1,1,-1)$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind. Dazu nehmen wir an, daß für die reellen Zahlen r, s und t gilt:

$$r(1,0,1) + s(0,1,1) + t(1,1,-1) = (0,0,0)$$

Die Vektoren sind linear unabhängig, wenn wir aus dieser Gleichung folgern können, daß $r = s = t = 0$ gilt, vgl. Def. (3.8). Die Gleichung ist äquivalent zum homogenen linearen Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcll} r \quad\; + t & = & 0 & \mid\ - \\ s + t & = & 0 & \mid \\ r + s - t & = & 0 & \hookleftarrow\!\mid \end{array}$$

Wir lösen es nach dem Gaußschen Eliminationsverfahren:

$$\begin{array}{rcll} r \quad\; + \; t & = & 0 & \\ s + \; t & = & 0 & \mid\ - \\ s - 2t & = & 0 & \hookleftarrow\!\mid \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} r \quad\; + \; t & = & 0 \\ s + \; t & = & 0 \\ -\, 3t & = & 0 \end{array}$$

Aus der letzten Gleichung folgt $t = 0$, damit aus der vorletzten $s = 0$ und aus der ersten $r = 0$.

Vorsicht: Bezeichnet man im Körper $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ wie in Körpern üblich das 0-Element mit 0, das 1-Element mit 1 und das additive Inverse von 1 mit -1, so kann man die Vektoren $(1,0,1),(0,1,1),(1,1,-1)$ auch als Element des $\mathbb{Z}_3$-Vektorraums $(\mathbb{Z}_3)^3$ auffassen. In diesem sind sie linear abhängig, denn

$$(1,0,1) + (0,1,1) - (1,1,-1) = (0,0,0) \text{ in } (\mathbb{Z}_3)^3!$$

(3.11) Lemma. (i) $v \in \operatorname{span}(M) \;\Rightarrow\; \operatorname{span}(M \cup \{v\}) = \operatorname{span}(M)$
(ii) $v \in \operatorname{span}(M) \setminus M \;\Rightarrow\; M \cup \{v\}$ linear abhängig

Beweis von (i): $\operatorname{span}(M) \subseteq \operatorname{span}(M \cup \{v\})$ ist klar.

Sei $w \in \operatorname{span}(M \cup \{v\})$, $w = \alpha v + \sum\limits_{j=1}^{l} \beta_j w_j$ mit $w_j \in M$.

$v \in \operatorname{span}(M) \Rightarrow v = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i v_i \Rightarrow w = \sum\limits_{i=1}^{k} (\alpha\alpha_i) v_i + \sum\limits_{j=1}^{l} \beta_j w_j \in \operatorname{span}(M)$.

Beweis von (ii): (3.7) $\Rightarrow$ Es existiert $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in K$, $v_1, \dots, v_k \in M$: $v \overset{(*)}{=} \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$.

Wir können (mittels der Vektorraumaxiome) etwaige Summanden $\alpha_i v_i$ und $\alpha_j v_j$ mit $v_i = v_j$ zu $(\alpha_i + \alpha_j)v_i$ zusammenfassen und dann annehmen, daß alle $v_1, \dots, v_k$ verschieden sind. $v \notin M \Rightarrow v, v_1, \dots, v_k$ sind alle verschieden.

$$(*) \Rightarrow 1 \cdot v - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = 0 \Rightarrow M \cup \{v\} \text{ linear abhängig.}$$

(3.12) Satz. *Folgende Aussage über eine Teilmenge M von V sind äquivalent:*

(i) *M ist Basis*
(ii) *M ist linear unabhängig und jede echte Obermenge $M' \subseteq V$ von M ist linear abhängig. ("M ist eine maximale linear unabhängige Teilmenge von V.")*
(iii) *Es gilt* $\operatorname{span}(M) = V$ *und für jede echte Teilmenge M'' von M gilt:* $\operatorname{span}(M'') \neq V$. *("$M$ ist ein minimales Erzeugendensystem von V.")*

Bew.: $V = \{0\} \Leftrightarrow M = \emptyset$ ist Basis von V. Dann ist (3.12) klar. Es genügt also, den Fall $M \neq \emptyset$ zu betrachten.

1) (i) $\Rightarrow$ (ii): Es ist zu zeigen, daß jede echte Obermenge $M' \subseteq V$ von M linear abhängig ist. Sei $v \in M' \setminus M$. Wegen $\operatorname{span}(M) = V$ (M Basis!) gilt $v \in \operatorname{span}(M) \setminus M$. Nach (3.11)(ii) ist $M \cup \{v\}$ und damit auch $M' \supseteq M \cup \{v\}$ linear abhängig.
2) (ii) $\Rightarrow$ (iii). Wir zeigen zunächst, daß $\operatorname{span}(M) = V$ gilt. Sei $v \in V \setminus M$. Wegen (ii) ist $M \cup \{v\}$ linear abhängig. Es existieren also verschiedene $v_1, \dots, v_k \in M$ und $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in K$, nicht alle $= 0$, mit

$$\alpha v + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = \underline{0}$$

Da M linear unabhängig ist ((ii)!), gilt $\alpha \neq 0$. Also

$$v = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{-\alpha_i}{\alpha} \right) v_i \in \operatorname{span}(M)$$

Also $V \setminus M \subseteq \operatorname{span}(M)$, und damit: $V = \operatorname{span}(M)$.
Sei schließlich M'' eine echte Teilmenge von M, $v \in M \setminus M''$. Wäre $v \in \operatorname{span}(M'')$, so würde aus (3.11)(ii) folgen, daß $M'' \cup \{v\} \subseteq M$ linear abhängig ist, im Widerspruch dazu, daß M nach Voraussetzung ((ii)!) linear unabhängig ist.
Also $v \notin \operatorname{span}(M'')$ und deshalb $\operatorname{span}(M'') \neq V$.
3) (iii) $\Rightarrow$ (i). Zu zeigen ist, daß M linear unabhängig ist. Seien $v_1, \dots, v_k$ verschiedene Elemente in M, $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in K$ und

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = \underline{0}$$

wäre eines der α_i ungleich 0, z.B. $\alpha_1 \neq 0$, so folgt:

$$v_1 = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{-\alpha_i}{\alpha_1}\right) v_i \in \operatorname{span}\{v_2, \ldots, v_k\} \subseteq \operatorname{span}(M \setminus \{v_1\})$$

Wegen (3.11)(i) folgt $\operatorname{span}(M) = \operatorname{span}(M \setminus \{v_1\})$, also $\operatorname{span}(M \setminus \{v_1\}) = V$, im Widerspruch zu (iii).

(3.13) Satz. *Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.*

Bem.: Wir zeigen sogar: Ist $M_0 \subseteq V$ linear unabhängig, so existiert eine M_0 enthaltende Basis von V.

Bew.: 1) Wir betrachten zunächst den Spezialfall, daß es ein endliches Erzeugendensystem, genannt M_1, von V gibt. Dann existiert das kleinste $n \in \mathbb{N}$, so daß es eine n-elementige Teilmenge von M_1 gibt, die V erzeugt. Sei M ein solches Erzeugendensystem. Dann folgt aus (3.12), daß M eine Basis von V ist. Zusätzlich gilt $M \subseteq M_1$.
2) Für den allgemeinen Fall benötigen wir folgendes

(3.14) Lemma von Zorn. Sei $\mathcal{M} \neq \emptyset$ eine Menge, deren Elemente Mengen sind. Gilt für jede Kette $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}$, daß $\bigcup\limits_{M \in \mathcal{K}} M \in \mathcal{M}$ gilt, so existiert ein maximales Element in $\mathcal{M}$, d.h. ein $M \in \mathcal{M}$, so daß aus $M \subseteq M' \in \mathcal{M}$ folgt $M = M'$.

Dabei heißt eine Teilmenge $\mathcal{K}$ von $\mathcal{M}$ Kette, falls $\mathcal{K} \neq \emptyset$ und falls für je zwei Elemente $M_1, M_2 \in \mathcal{K}$ gilt:

$$(*) \qquad M_1 \subseteq M_2 \text{ oder } M_2 \subseteq M_1$$

Wir nehmen das Lemma von Zorn als Axiom der Mengenlehre hin und definieren in Abhängigkeit von einer gegebenen, linear unabhängigen Menge $M_0 \subseteq V$:

$$\mathcal{M} := \{M \mid M_0 \subseteq M \subseteq V, M \text{ linear unabhängig}\}$$

Wegen $M_0 \in \mathcal{M}$ gilt $\mathcal{M} \neq \emptyset$. Wir wollen die Voraussetzung von (3.14) nachweisen. Sei also $\mathcal{K}$ eine Kette in $\mathcal{M}$. Dann gilt $M_0 \subseteq \bigcup\limits_{M \in \mathcal{K}} M$ und es bleibt zu zeigen, daß $\bigcup\limits_{M \in \mathcal{K}} M$ linear unabhängig ist.

Seien $v_1, \ldots, v_k$ verschiedene Vektoren in $\bigcup\limits_{M \in \mathcal{K}} M$. Dann existieren $M_1, \ldots, M_k \in \mathcal{K}$ mit $v_1 \in M_1, \ldots, v_k \in M_k$. Wegen $(*)$ existiert eine der Mengen $M_1, \ldots, M_k$, sagen wir M_j, die die anderen enthält. Dann sind $v_1, \ldots, v_k$ verschiedene Elemente in M_j und damit linear unabhängig (, da $M_j \in \mathcal{M}$ linear unabhängig ist). Also $\bigcup\limits_{M \in \mathcal{K}} M \in \mathcal{M}$. Nach (3.2) ist ein maximales Element von $\mathcal{M}$, das nach (3.14) existiert, eine M_0 enthaltende Basis von V.

Wichtig: Es gibt im allgemeinen sehr viele Basen eines Vektorraumes. Sie haben aber alle "gleich viele" Elemente, siehe (3.16). Zum Beispiel bilden zwei Vektoren $v = (a, b)$,

$w = (c, d)$ des $\mathbb{R}^2$ genau dann eine Basis des $\mathbb{R}^2$, wenn $ad - bc \neq 0$ (, was "meistens" der Fall ist!).

Bemerkung: Die "Lösung eines homogenen linearen Gleichungssystems", d.h. das Auffinden einer Parameterdarstellung des Lösungsraums, besteht gerade darin, eine Basis dieses Lösungsraums zu finden.