Kapitel 4: Lineare Abbildungen und Matrizen.

Wie überall, so sind auch in der Mathematik nicht nur die einzelnen Objekte wichtig, sondern auch die Beziehungen zwischen ihnen, die hier meist durch Abbildungen beschrieben werden, die (in einem zu definierenden Sinn) die Struktur der Objekte erhalten, sogenannte Homomorphismen. Im folgenden seien V und W Vektorräume über <u>demselben</u> Körper K.

(4.1) Definition. Eine Abbildung $L : V \to W$ heißt <u>linear</u> (oder <u>Vektorraumhomomorphismus</u>), falls für alle $v, v_1, v_2 \in V$ und alle $\alpha \in K$ gilt:

(i)	$L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2)$		(L ist "additiv")
(ii)	$L(\alpha V) = \alpha L(v)$		(L ist "homogen")

Bez.: Statt "lineare Abbildung" ist auch "linearer Operator" üblich. Im Fall $W = K$ spricht man oft von einem "linearen Funktional" oder einer "Linearform" $L : V \to K$.

$$\mathrm{Hom}(V, W) := \{L \mid L : V \to W \text{ linear}\}.$$

Eine lineare Abbildung $L : V \to V$ heißt <u>Endomorphismus</u>, $\mathrm{End}(V) = \{L \mid L : V \to V \text{ linear}\}$.

Ein Homomorphismus $L : V \to W$ heißt <u>Isomorphismus</u>, falls L bijektiv ist. Zwei K-Vektorräume V und W heißen <u>isomorph</u>, falls es einen Isomorphismus $L : V \to W$ gibt.

Beispiele:

0) $\mathrm{id}_V \in \mathrm{End}(V)$.
   Ist $L : V \to W$ die "0-Abbildung" definiert durch
   $$\forall v \in V : Lv = \underline{0} \in W,$$
   so gilt $L \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Ist $U \subseteq V$ Unterraum, so ist die Inklusion $i : U \to V$, $\forall u \in U$: $i(u) := u$, eine lineare Abbildung.
1) Für $\alpha \in K$ sei $S_\alpha : V \to V$, $S_\alpha(v) := \alpha v$, die "Streckung" um α. Dann gilt: $S_\alpha \in \mathrm{End}(V)$.
2) $V :=$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}$. $L \in \mathrm{End}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R}\, \forall x \in \mathbb{R} : L(x) = mx$. Nämlich: $m := L(1)$. Dann gilt: $L(x) = L(x \cdot 1) \overset{\text{(ii)}}{=} x \cdot L(1) = m \cdot x$.
3) Zu reellen Zahlen $a < b$ ist $C^0([a, b], \mathbb{R}) = \{f \mid f : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, vgl. Bsp. 4 nach (3.1).
   $$L : C^0([a, b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad L(f) := \int_a^b f(x)dx$$
   L ist linearer Operator von $C^0([a, b], \mathbb{R})$ nach $\mathbb{R}$ ("Lineares Funktional").
4) $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ ist differenzierbar und } f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ ist stetig}\}$
   $D : C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), D(f) := f'$. D ist linearer Operator.
5) Die im Exkurs über Codes definierte Abbildung $F : (\mathbb{Z}_2)^n \to (\mathbb{Z}_2)^p$ ist linear.

Wichtig ist folgender Zusammenhang mit der Analysis: Ganz grob gesprochen ist die Analysis die Kunst, nichtlineare Funktionen (in einer kleinen Umgebung eines festen Punktes x_0) durch lineare Funktionen zu approximieren und aus Eigenschaften der approximierenden linearen Funktion (, mit der man gut explizit rechnen kann) auf Eigenschaften der ursprünglichen nichtlinearen Funktion zu schließen.

Im Fall von (nichtlinearen) Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ ist die approximierende lineare Funktion gegeben durch $h \in \mathbb{R} \to f'(x_0)h \in \mathbb{R}$, und es gilt für den durch $f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + R(h)$ definierten "Approximationsfehler" $R(h) : \lim\limits_{h\to 0} \frac{R(h)}{h} = 0$. Betrachtet man (z.B. in der Analysis II) Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$, so wird in der analogen Definition der Differenzierbarkeit aus der linearen Funktion $h \in \mathbb{R} \to f'(x_0)h \in \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung $Df(x_0) \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.
Noch allgemeiner betrachtet man in der Theorie der Differentialgleichungen (und in der Physik und in anderen Wissenschaften) nichtlineare Differentialoperatoren zwischen unendlich-dimensionalen Funktionenräumen, die durch lineare Operatoren zwischen solchen Funktionenräumen approximiert werden. Oft verwendet man in der Physik direkt diese linearisierten Operatoren (z.B. Wellengleichung, Wärmeleitungsgleichung).

Bez.: Ist $L \in \operatorname{Hom}(V, W)$, so heißt

$$\ker L := \{v \in V \mid L(v) = \underline{0} \in W\} = L^{-1}(\{\underline{0}\})$$

der Kern von L und

$$\operatorname{im} L := \{w \in W \mid \exists v \in V : L(v) = w\} = L(V)$$

das Bild von L.

(4.2) Fakt. Sei $L \in \operatorname{Hom}(V, W)$, U_1 Unterraum von V, U_2 Unterraum von W. Dann gilt:

(i) $L(U_1)$ ist Unterraum von W.
(ii) $L^{-1}(U_2)$ ist Unterraum von V.

Speziell: $\ker L$ ist Unterraum von V, $\operatorname{im} L$ ist Unterraum von W, und es gilt $L(\underline{0}) = \underline{0}$.

Bew.:

(i) Sind $w_1, w_2 \in L(U_1)$, so existieren $v_1, v_2 \in U_1$, so daß $L(v_1) = w_1$ und $L(v_2) = w_2$ gilt. Da U_1 Unterraum ist, gilt $v_1 + v_2 \in U_1$, also $L(v_1 + v_2) \in L(U_1)$. Die Additivität von L impliziert: $w_1 + w_2 = L(v_1) + L(v_2) = L(v_1 + v_2) \in L(U_1)$.
Analog folgt: Ist $w \in L(U_1), \alpha \in K$, so gilt $\alpha w \in L(U_1)$. Schließlich impliziert $U_1 \neq \emptyset$, daß $L(U_1) \neq \emptyset$ gilt.
(ii) Ist $v \in L^{-1}(U_2), \alpha \in K$, so gilt $\alpha L(v) \in U_2$, da U_2 ein Unterraum ist. Die Homogenität von L impliziert: $L(\alpha v) = \alpha L(v) \in U_2$, also $\alpha v \in L^{-1}(U_2)$. Analog folgt: Sind $v_1, v_2 \in L^{-1}(U_2)$, so gilt $v_1, v_2 \in L^{-1}(U_2)$. Schließlich zeigen wir, daß $L(\underline{0}) = \underline{0}$, gilt. Daraus folgt dann $\underline{0} \in L^{-1}(U_2)$, speziell $L^{-1}(U_2) \neq \emptyset$. $L(\underline{0}) = L(0\underline{0}) = 0L(\underline{0}) = \underline{0}$, vgl. (3.2)(i).

(4.3) Fakt. Sei $L \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Folgende Aussagen sind äquivalent.

(i) L ist injektiv.
(ii) $\ker L = \{\underline{0}\}$.
(iii) Ist $M \subseteq V$ linear unabhängig, so ist $L(M) \subseteq W$ linear unabhängig.

Bew.: (i) $\Rightarrow$ (ii): Ist L injektiv, so ist $\underline{0} \in V$ das einzige Element von V, das durch L auf $\underline{0} \in W$ abgebildet wird, also $\ker L = \{\underline{0}\}$.
(ii) $\Rightarrow$ (iii): Es gelte $\ker L = \{\underline{0}\}$ und $M \subseteq V$ sei linear unabhängig. Seien $w_1, \ldots, w_k$ verschiedene Elemente von $L(M)$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in K$, und es gelte $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i w_i = \underline{0}$. Wir wollen zeigen, daß $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$ gilt. Zu jedem $w_i \in L(M)$ existiert ein $v_i \in M$ mit $L(v_i) = w_i$. Da die $w_1, \ldots, w_k$ verschieden sind, sind auch die $v_1, \ldots, v_k$ verschieden. Durch Induktion folgt aus der Linearität von L, daß

$$L\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i L(v_i)$$

gilt. Aus $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i L(v_i) = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i w_i = \underline{0}$ folgt also

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i \in \ker L = \{0\},$$

d.h. $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = \underline{0}$. Da die $v_1, \ldots, v_k$ verschiedene Elemente der linear unabhängigen Menge M sind, folgt $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Seien $v_1 \neq v_2 \in V$. Dann gilt $v_2 - v_1 \neq \underline{0}$, d.h. die Menge $M = \{v_2 - v_1\} \subseteq V$ ist linear unabhängig. Nach (iii) ist dann auch $L(M) = \{L(v_2 - v_1)\} \subseteq W$ linear unabhängig, d.h. $L(v_2 - v_1) \neq \underline{0}$. Nun gilt (vgl. (3.2)(iii)):

$$\underline{0} \neq L(v_2 - v_1) = L(v_2 + (-1)v_1) = L(v_2) + L((-1)v_1) = L(v_2) - L(v_1).$$

Also $L(v_1) \neq L(v_2)$, d.h. L ist injektiv.

Bem.: Die linke Seite eines linearen Gleichungssystems I mit k Gleichungen und n Unbekannten definiert wie folgt eine lineare Abbildung $L \in \mathrm{Hom}(K^n, K^k)$:

$$L(x_1, \ldots, x_n) := (a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \ldots, a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n) \in K^k.$$

Das Problem, für eine gegebene rechte Seite $b = (b_1, \ldots, b_k) \in K^k$ von I die Lösungsmenge L_I zu finden, ist also gerade das Problem die Urbildmenge $L^{-1}(\{b\})$ zu finden,

$$L_I = L^{-1}(\{b\}).$$

Es gilt also:
I ist besitzt für die rechte Seite $b = (b_1, \ldots, b_k)$ eine Lösung $\Leftrightarrow$ $b \in \mathrm{im}\, L$.

I besitzt für jede rechte Seite höchstens eine Lösung $\Leftrightarrow$ L injektiv $\Leftrightarrow$ $\ker L = \{\underline{0}\}$.
I besitzt für jede rechte Seite genau eine Lösung $\Leftrightarrow$ L Isomorphismus.

(4.4) Lemma. Sei $L \in \mathrm{Hom}(V, W)$, $M \subseteq V$. Dann gilt:

$$L(\mathrm{span}(M)) = \mathrm{span}\, L(M).$$

Bew.: Übungsaufgabe.

(4.5) Folgerung. Sei $L \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Dann sind äquivalent:

(i) L ist Isomorphismus ($\Leftrightarrow$ L bijektiv).
(ii) Für jede Basis B von V gilt: $L|B$ ist injektiv und $L(B)$ ist Basis von W.
(iii) Es existiert eine Basis B von V, so daß $L|B$ injektiv und $L(B)$ Basis von W ist.

Bew.:

(i) $\Rightarrow$ (ii). Sei $B \subseteq V$ Basis $\overset{(4.3)}{\Rightarrow}$ $L(B)$ ist linear unabhängig.
$\mathrm{span}\, L(B) \overset{(4.4)}{=} L(\mathrm{span}\, B) = L(V) \overset{L \text{ surjektiv}}{=} W \Rightarrow L(B)$ ist Erzeugendensystem von W. L injektiv $\Rightarrow L|B$ injektiv.
(ii) $\Rightarrow$ (iii): klar, da nach (3.13) eine Basis von V existiert.
(iii) $\Rightarrow$ (i). Zeige: L ist injektiv. Sei $v \in \ker L$. Dann existiert $k \in \mathbb{N}$ und verschiedene $v_1, \ldots, v_k \in B$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in K$: $v = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$. Daraus folgt

$$(*) \qquad \underline{0} = L(v) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i L(v_i).$$

Da $L|B$ injektiv ist, sind die $L(v_1), \ldots, L(v_k)$ verschiedene Elemente der Basis $L(B)$. Also folgt aus $(*)$: $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$ und daraus $v = 0$. Also $\ker L = \{\underline{0}\}$, d.h. L ist injektiv.
$L(V) = L\, \mathrm{span}\, B) \overset{(4.4)}{=} \mathrm{span}\, L(B) = W \Rightarrow L$ ist surjektiv.

Bez.: Eine geordnete Basis $\mathcal{G}$ eines n-dimensionalen Vektorraums V ist ein n-Tupel von Vektoren $\mathcal{G} = (v_1, \ldots, v_n)$, so daß $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V ist.

(4.6) Satz. *Sei* $\dim V = n < \infty$, $\mathcal{G} = (v_1, \ldots, v_n)$ *geordnete Basis von* V *und* $w_1, \ldots, w_n$ *beliebige Elemente von* W. *Dann existiert genau ein* $L \in \mathrm{Hom}(V, W)$, *so daß* $Lv_1 = w_1 \ldots, Lv_n = w_n$ *gilt.*

Beweis: Vorbemerkung: Wegen $\mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_n\} = V$ existieren zu jedem $v \in V$ Skalare $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$, so daß $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ gilt, und da die $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind, sind die $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ eindeutig durch v bestimmt, vgl. (3.9).

(i) Eindeutigkeit von L: Es seien L, $L' \in \operatorname{Hom}(V,W)$ und $Lv_i = L'v_i$ für alle $i \in \{1,\dots,n\}$. Sei $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \in V$. Dann gilt

$$L(v) = L\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i L(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i L'(v_i) = L'(\sum \alpha_i v_i) = L'(v).$$

(ii) Existenz von L: Für $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \in V$ definieren wir

$$L(v) := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i \in W.$$

Ist $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$, $v' = \sum \alpha_i' v_i$, so $v + v' = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \alpha_i') v_i$ und damit:
$L(v+v') = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \alpha_i') w_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' w_i = L(v) + L(v')$, d.h. L ist additiv. Analog folgt, daß L homogen ist, also $L \in \operatorname{Hom}(V,W)$. Offensichtlich gilt $L(v_i) = w_i$ für alle $i \in \{1,\dots,n\}$.

Bem.: Eine (4.6) entsprechende Aussage gilt auch im Fall $\dim V = \infty$.

(4.7) Folgerung. Seien V, W K-Vektorräume, $\dim V = n < \infty$. Dann gilt:

(i) V ist isomorph zu K^n.
(ii) V ist isomorph zu $W \Leftrightarrow \dim V = \dim W$.

Bew.:

(i) Sei $(v_1,\dots,v_n)$ geordnete Basis von V. Nach (4.6) existiert ein $L \in \operatorname{Hom}(V,K^n)$ mit $L(v_1) = e_1, \dots, L(v_n) = e_n$. Nach (4.5) ist L Isomorphismus.
(ii) Analog folgt aus $\dim V = \dim W$, daß V und W isomorph sind. Ist umgekehrt $L : V \to W$ Isomorphismus, so folgt aus (4.5), daß $\dim V = \dim W$ gilt.

(4.8) Dimensionssatz für lineare Abbildungen. *Ist* $L \in \operatorname{Hom}(V,W)$ *und* $\dim V < \infty$, *so gilt* $\dim(\ker L) < \infty$, $\dim(\operatorname{im} L) < \infty$ *und*

$$\dim V = \dim(\ker L) + \dim(\operatorname{im} L).$$

Speziell folgt: Ist $\dim V = \dim W$, *so gilt:* L *injektiv* $\Leftrightarrow$ L *surjektiv* $\Leftrightarrow$ L *bijektiv.*

Bew.: Aus (3.21) folgt die Existenz eines zu $\ker L$ komplementären Unterraums U von V, d.h. $\ker L \oplus U = V$ und

$$\dim(\ker L) + \dim U = \dim V.$$

Wir zeigen, daß $L|U : U \to \operatorname{im} L$ ein Isomorphismus ist und damit $\dim U = \dim(\operatorname{im} L)$, woraus mit der vorangehenden Gleichung die Behauptung folgt.

$L|U$ ist injektiv, da $\ker(L|U) = \ker L \cap U = \{\underline{0}\}$, vgl. (4.3). Zu jedem $w \in \operatorname{im} L$ existiert ein $v \in V$ mit $L(v) = w$. Wegen $\ker L \oplus U = V$ existieren $v_1 \in \ker L$ und $u \in U$, so daß $v = v_1 + u$ gilt. Dann folgt $w = L(v) = L(v_1) + L(u)$, d.h. $w \in L(U)$. Das zeigt, daß $L|U : U \to \operatorname{im} L$ surjektiv ist.

Anwendung:

Sei I die linke Seite eines linearen Gleichungssystems mit n Unbekannten und k Gleichungen und Koeffizienten $a_{ij} \in K$. Sei $L : K^n \to K^k$ die zugehörige lineare Abbildung, vgl. Bem. nach (4.3). Dann gilt: $L_{I^{\text{hom}}} = \ker L$ und

$$\{b = (b_1, \ldots, b_k) \in K^k \mid \exists \text{ Lösung von } I \text{ mit der rechten Seite } b\} = \operatorname{im} L.$$

Aus (4.8) folgt: $\dim L_{I^{\text{hom}}} = n - \dim(\operatorname{im} L) \geq n - k$. Das wurde schon in (3.25) gezeigt.

$$\begin{aligned} I \text{ ist für beliebige rechte Seiten } (b_1, \ldots, b_k) \text{ lösbar } &\Leftrightarrow \dim(\operatorname{im} L) = k \\ &\Leftrightarrow \dim(L_{I^{\text{hom}}}) = n - k \end{aligned}$$

d.h. ist $n \geq k$ und ist I für beliebige rechte Seite lösbar, so ist die Lösungsmenge für jede rechte Seite ein $(n-k)$-dimensionaler affiner Unterraum. Ist $k = n$, so gilt: I ist für beliebige rechte Seiten $(b_1, \ldots, b_n)$ lösbar $\Leftrightarrow L_{I^{\text{hom}}} = \{0\} \Leftrightarrow I$ besitzt für jede rechte Seite $(b_1, \ldots, b_n)$ genau eine Lösung.