(4.21) Def.: Der $\underline{\text{Rang}}$ $\underline{\mathrm{rg}(A)}$ von $A \in K^{m\times n}$ ist die maximale Zahl linear unabhängiger Spaltenvektoren von A.

Bem.: 1) $0 \le \mathrm{rg}(A) \le \min\{n, m\}$. Begründung: Da A n Spaltenvektoren hat, gilt $\mathrm{rg}(A) \le n$. Da der Raum $K^{m\times 1} \simeq K^m$ der Spaltenvektoren m-dimensional ist, gilt $\mathrm{rg}(A) \le m$, vgl. (3.16) Austauschsatz von Steinitz.
2) Für $A \in K^{n\times n}$ gilt: $\mathrm{rg}(A) = n \Leftrightarrow A \in \mathrm{GL}_n(K)$.

(4.22) Fakt: Sei $L \in \mathrm{Hom}(K^n, K^m)$ und $A = \mathrm{Mat}(L)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(A) &= \dim(\mathrm{span}\{\text{Spaltenvektoren von } A\}) = \dim(\mathrm{im}\, L) \\ &= n - \dim(\ker L) = n - \dim\{x \in K^{n\times 1} \mid Ax = 0\}. \end{aligned}$$

Bew.: Die 1. Gleichung folgt aus der Tatsache, daß die Dimension eines Vektorraums die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren dieses Vektorraums ist. Die 2. Gleichung, folgt aus "$L(e_j) = j$'ter Spaltenvektor von A" und $\mathrm{im}\, L = \mathrm{span}\{L(e_j) \mid 1 \le j \le n\}$. Die 3. Gleichung folgt aus (4.8) und die 4. Gleichung folgt aus der dritten.

(4.23) Satz. *Für jedes $A \in K^{m\times n}$ ist $\mathrm{rg}(A)$ auch die maximale Zahl linear unabhängiger Zeilenvektoren von A ("Spaltenrang = Zeilenrang").*

Bew.: Siehe (4.25).

(4.24) Satz. *Sei $A = (a_{ij}) \in K^{m\times n}$ und I das lineare Gleichungssystem*

I $$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

und $(A|b) \in K^{m\times(n+1)}$ die Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$

Dann gilt: I besitzt eine Lösung $\Leftrightarrow \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b)$

Bew.: $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & + \dots + & a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + \dots + & a_{mn}x_n & = b_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$$x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}}_{=:A_1} + x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}}_{=:A_2} + \dots + x_n \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}}_{=:A_n} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{=b} \in K^{m\times 1}.$$

Also: I besitzt Lösung $\Leftrightarrow \mathrm{span}\{A_1, \dots, A_n\} = \mathrm{span}\{A_1, \dots, A_n, b\}$
$\Leftrightarrow \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b)$

Konkrete Rechenverfahren:
(4.25) **Lösen eines linearen Gleichungssystems mit dem Gaußschen Algorithmus in Matrizenschreibweise**. (Zum Lösen von linearen Gleichungssystemen siehe auch (1.13), (1.15), (1.16), (3.25), (3.26) und (4.8) plus Anwendung).

Gegeben das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccc} a_{11}x_1 & +\ldots+ & a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & +\ldots+ & a_{mn}x_n & = b_m. \end{array}$$

Setze

$$A_1 := \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \in K^{m\times(n+1)}.$$

1. Fall $a_{11} \neq 0$:

$$A_1 \to A_2 := \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \ldots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} & \frac{b_1}{a_{11}} \\ 0 & a_{22} - a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}} & \ldots & a_{2n} - a_{21}\frac{a_{1n}}{a_{11}} & b_2 - a_{21}\frac{b_1}{a_{11}} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{m2} - a_{m1}\frac{a_{12}}{a_{11}} & \ldots & a_{mn} - a_{m1}\frac{a_{1n}}{a_{11}} & b_m - a_{m1}\frac{b_1}{a_{11}} \end{pmatrix}$$

2. Fall: $a_{11} = 0$, aber es existiert $i > 1 : a_{i1} \neq 0$. Vertausche 1. und i'te Zeile von A_1. Dann 1. Fall.

3. Fall: $a_{i1} = 0$ für $1 \leq i \leq m$, d.h.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0\, a_{12} & \ldots & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ 0\, a_{m2} & \ldots & b_m \end{pmatrix} \in K^{m\times(n+1)}. \qquad \text{Betrachte } \tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{12} & \ldots & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m2} & \ldots & b_m \end{pmatrix} \in K^{m\times n}.$$

Dann 1. Fall (für $n-1$).

Iteriere! $\to$ Endergebnis ist eine Matrix $(\overline{A}|\overline{b}) \in K^{m\times(n+1)}$ in Treppenform, z.B.

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & * & * & \cdot & \cdot & \cdot & * \\ 0 & 0 & 1 & * & \cdot & \cdot & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & \cdot & * \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & \end{pmatrix} \qquad \text{(hier ist } j_1 = 1,\, j_2 = 3,\, j_3 = 4),$$

d.h. es gibt Zahlen $k \leq \min\{m, n\}$ und $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_k \leq n$ ($\Rightarrow j_i \geq i$ für $i \in \{1, \ldots, k\}$) mit:

1) $a_{ij_i} = 1$ für $1 \leq i \leq k$ und $a_{ij} = 0$ für $1 \leq i \leq k$ und $j < j_i$.
2) $a_{ij} = 0$ für $i > k$.

Wegen (1.13) gilt für alle $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^{n\times 1}$ und alle $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in K^{m\times 1}$:

$$(I) \qquad Ax = b \Leftrightarrow \overline{A}x = \overline{b} \qquad (\overline{I})$$

Falls $b = 0$, so $\overline{b} = 0$. Deshalb folgt aus (4.22):

$$\mathrm{rg}(A) = n - \dim\{x \mid Ax = 0\} = n - \underbrace{\dim\{x \mid \overline{A}x = 0\}}_{=n-k} = \mathrm{rg}(\overline{A}) = k.$$

$$\text{Andererseits: } \mathrm{rg}(A) = k \;=\; \dim(\mathrm{span}\{\text{Zeilenvektoren von } \overline{A}\}) \;=\; \dim(\mathrm{span}\{\text{Zeilenvektoren von } A\})$$

Daraus folgt (4.23).

I besitzt Lösung $\Leftrightarrow$ Für $i > k = \mathrm{rg}(A)$ gilt: $\overline{b}_i = 0$. Dann ist $\overline{I}$ rekursiv auflösbar, beginnend mit der k'ten Zeile, und die Lösungsmenge von I (=Lösungsmenge von $\overline{I}$) ist ein $(n-\mathrm{rg}(A))$-dimensionaler affiner Unterraum von K^n.

(4.26) **Berechnung der inversen Matrix mit dem Gaußschen Algorithmus**. *Gegeben $A \in K^{n\times n}$. Frage: Gilt $A \in \mathrm{GL}_n(K)$. Wenn ja, berechne A^{-1}.*

Betrachte $(A \mid E_n) = \left(\begin{array}{c|ccc} A & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & 1 \end{array}\right) \in K^{n\times(2n)}$ und wende (4.25) analog auf $(A \mid E_n)$ an. Man erhält $(\overline{A} \mid \overline{B}) \in K^{n\times(2n)}$, und es gilt $A \in \mathrm{GL}_n(K) \Leftrightarrow \overline{A} \in \mathrm{GL}_n(K) \Leftrightarrow \overline{a}_{ii} = 1$ für $1 \leq i \leq n$. Ausserdem gilt $\overline{a}_{ij} = 0$ für $i > j \ldots$ (d.h. $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & * & \ldots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$). Durch geeignete Additionen der letzten, der vorletzten, ..., der 2. Zeile verwandelt man $(\overline{A} \mid \overline{B})$ in $(E_n \mid \overline{\overline{B}})$, und es gilt für $j \in \{1, \ldots, n\}$ und alle $x \in K^{n\times 1}$:

$$Ax = e_j \Leftrightarrow E_n x (= x) = j\text{'te Zeile von } \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{B}}e_j.$$

Also: $A\overline{\overline{B}}e_j = Ax = e_j$ für $j \in \{1, \ldots, n\}$ und damit $A\overline{\overline{B}} = E_n$. Also gilt:

$$\overline{\overline{B}} \text{ ist zu } A \text{ inverse Matrix.}$$

Zwei explizite Beispiele zu den Rechenverfahren.

Zu (4.25):

$$\text{I} \qquad \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -2 \\ 3x_1 & + & 3x2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & 6 \\ -x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 14 \end{array}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & -1 & -2 & 6 \\ -1 & -1 & 3 & 2 & 14 \end{array}\right) \qquad -3 \qquad +$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 12 \end{array}\right) \qquad - \qquad : \tfrac{1}{2}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad +$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Es folgt: $\mathrm{rg}(A) = 2$, I ist lösbar, der Lösungsraum L_I ist ein 2-dimensionaler affiner Unterraum.

Explizite Lösung:

$$\begin{array}{lcl} & & x_4 =: \lambda \\ x_3 + \frac{1}{2}x_4 = 6 & \Rightarrow & x_3 = 6 - \frac{1}{2}\lambda \\ & & x_2 =: \mu \\ x_1 + x_2 \quad - \frac{1}{2}x_4 = 4 & \Rightarrow & x_1 = \frac{1}{2}\lambda - \mu + 4 \end{array}$$

$$\begin{aligned} L_I &= \{(\tfrac{1}{2}\lambda - \mu + 4, \mu, 6 - \tfrac{1}{2}\lambda, \lambda) \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(4,0,6,0) + \lambda(\tfrac{1}{2}, 0, -\tfrac{1}{2}, 1) + \mu(-1,1,0,0) \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= (4,0,6,0) + \mathrm{span}\{(\tfrac{1}{2}, 0, -\tfrac{1}{2}, 1), (-1,1,0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^4 \end{aligned}$$

Zu (4.26)

Berechnung von A^{-1} für $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad - \qquad -$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad + \qquad \cdot(-1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \Rightarrow \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}^{3\times 3}.$$

Speziell folgt: $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q})$.