Speziell besagt (5.22): Die Abbildung $A \to \det A$ ist ein Gruppenhomomorphismus von $(\mathrm{GL}_n(K), \cdot)$ auf $(K \setminus \{0\}, \cdot)$. $\mathrm{SL}_n(K) = \{A \in \mathrm{GL}_n(K) | \det A = 1\}$ ist Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(K)$, die spezielle lineare Gruppe.

Eigenwerte und Eigenvektoren (eine Anwendung der Determinante)

(5.23) Def.: Sei V K-Vektorraum, $L \in \mathrm{End}(V)$. $\lambda \in K$ heißt Eigenwert (EW) von L, falls ein $v \in V \setminus \{0\}$ existiert mit $L(v) = \lambda v$. $v \in V$ heißt Eigenvektor (EV) von L, falls $v \neq 0$ gilt und ein $\lambda \in K$ existiert mit $L(v) = \lambda v$. In diesem Fall heißt v ein Eigenvektor zum Eigenwert λ.

Bem.: v EV zum EW λ, $\alpha \in K \setminus \{0\} \Rightarrow \alpha v$ EV zum EW λ.

Bsp.:

1) Ist $L = \lambda \, \mathrm{id}_V$, so ist λ der einzige EW von L und jedes $v \in V \setminus \{0\}$ ist EV zum EW λ.
2) Ist $L : K^n \to K^n$ definiert durch $L(e_i) = \lambda_i e_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$, d.h.

$$\mathrm{Mat}(L) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

so sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ Eigenwerte von L und $e_1, \ldots, e_n$ Eigenvektoren von L.
3) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_2)$ "Scherung", mit

$$\mathrm{Mat}(L) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\lambda = 1$ der einzige EW von L und $x \in \mathbb{R}^2$ ist genau dann EV von L, wenn $x = (x_1, 0)$ für ein $x_1 \neq 0$ gilt.
4) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L(x_1, x_2) = (ax_1 - bx_2, bx_1 + ax_2)$ mit

$$\mathrm{Mat}(L) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Es folgt aus Aufgabe 1b), Blatt 11, daß L für $b \neq 0$ keinen (reellen) EW hat. Geometrisch ist L eine "Drehstreckung". Identifiziert man $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ durch $(x_1, x_2) \leftrightarrow x_1 + ix_2$, vgl. Kap. 2, so kann man L schreiben als: $L(x_1 + ix_2) = (a + ib)(x_1 + ix_2)$. Die Abbildung, die $z \in \mathbb{C}$ die Zahl $(a + ib)z \in \mathbb{C}$ zuordnet, ist also eine Drehstreckung.
5) "Gekoppelte Schwingungen": Gegeben $A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$, gesucht Lösungen $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ der "Differentialgleichung":

$$(*) \qquad x''(t) = A(x(t)) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Ist $v \in \mathbb{R}^n$ EV von A zum EW $\lambda \in \mathbb{R}$ und ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lösung von $f''(t)$-$\lambda f(t)$ $= 0$ (diese sind explizit bekannt!), so ist $x(t) := f(t)v$ Lösung von $(*)$:

$$x''(t) = f''(t)v = \lambda f(t)v = f(t)A(v) = A(f(t)v) = A(x(t)).$$

(5.24) Satz. *Sei* $1 \leq \dim V < \infty$, $L \in \mathrm{End}(V)$. *Dann gilt:*

$$\lambda \,\mathrm{EW}\ \textit{von}\ L \Leftrightarrow \det(L - \lambda\,\mathrm{id}_V) = 0.$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{Bew.:} & \det(L - \lambda\,\mathrm{id}_V) = 0 & \overset{(5.20)(\mathrm{ii})}{\Leftrightarrow} & (L - \lambda\,\mathrm{id}_V) \notin \mathrm{Aut}(V) \overset{(4.8)}{\Leftrightarrow} \\ & \mathrm{kern}(L - \lambda\,\mathrm{id}_V) \neq \{0\} & \Leftrightarrow & \exists v \in V \setminus \{0\} : (L - \lambda\,\mathrm{id}_V)(v) = 0 \\ & & \Leftrightarrow & \exists v \in V \setminus \{0\} : L(v) = \lambda v. \end{array}$$

Bem.: Ist $\mathrm{Mat}^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}(L) = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$, so gilt $\mathrm{Mat}^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}(L - \lambda\,\mathrm{id}_V) = (a_{ij} - \lambda\delta_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. Also nach (5.21):

$$\begin{aligned} \det(L - \lambda\,\mathrm{id}_V) &= \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)(a_{1\sigma(1)} - \lambda\delta_{1\sigma(1)}) \cdot \ldots \cdot (a_{n\sigma(n)} - \lambda\delta_{n\sigma(n)}) \\ &= (-1)^n\lambda^n + \left(\sum_{i=1}^n a_{ii}\right)(-1)^{n-1}\lambda^{n-1} + ?\lambda^{n-2} + \ldots + ?\lambda + \det L, \end{aligned}$$

mit von den a_{ij} abhängenden Koeffizienten ?, die uns im Moment nicht weiter interessieren. Einen Ausdruck dieser Art nennt man "ein Polynom in (der Variablen) λ".

Bez.: $P_L(\lambda) := \det(L - \lambda\,\mathrm{id}_V)$ heißt das charakteristische Polynom von L.

(5.24) besagt: λ EW von $L \Leftrightarrow P_L(\lambda) = 0 \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \lambda$ Nullstelle von P_L. Ob Polynome (vom Grad ≥ 1) stets Nullstellen haben, hängt vom Körper K ab!

$$\begin{array}{lcl} K = \mathbb{Q}, \mathbb{R} & \to & \text{nicht immer, z.B. } \lambda^2 + 1 \\ K = \mathbb{C} & \to & \text{stets ("Fundamentalsatz der Algebra")} \end{array}$$

Verfahren zur Bestimmung von EW'en und EV'en eines $L \in \mathrm{End}(V)$:

1) Berechne P_L $(= \det(L - \lambda\,\mathrm{id}_V))$.
2) Bestimme Nullstellen von P_L (= EW'e von L). Das ist oft nur approximativ möglich.
3) λ Nullstelle von $P_L \Rightarrow$ Das lineare Gleichungssystem $L(v) = \lambda v$ besitzt Lösung $v \neq 0$. Bestimme alle Lösungen $\neq 0$(= EVen zum EW λ).

Es ist leicht zu zeigen: Besitzt P_L $n(= \dim V)$ verschiedene Nullstellen, so ist L diagonalisierbar ($\Leftrightarrow$ es existiert Basis $\mathcal{G}$ von V: $\mathrm{Mat}^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}(L) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$, nämlich: $\mathcal{G} = (v_1, \ldots, v_n)$, v_i EV von L zum EW λ_i).

Weitere Anwendungen der Determinante:

(5.25) Def.: Eine (geordnete) Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ des $\mathbb{R}^n$ heißt positiv orientiert (oder Rechtssystem), falls $D_0(v_1, \ldots, v_n) > 0$ (sonst negativ orientiert oder Linkssystem).

Bsp.: $(e_1, \ldots, e_n)$ ist positiv orientiert, $(-e_1, e_2, \ldots, e_n)$ und $(e_2, e_1, e_3, \ldots, e_n)$ sind negativ orientiert.

Bem.: Ist $L \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)$, $\det L > 0$, so gilt:

$$(v_1, \ldots, v_n) \text{ positiv orientierte Basis} \Leftrightarrow (L(v_1), \ldots, L(v_n)) \text{ positiv orientierte Basis.}$$

(5.26) Cramersche Regel (Gabriel Cramer 1704-1752). Sei

$$\mathrm{I} \qquad \begin{array}{cccc} a_{11}x_1 & + \ldots + & a_{1n}x_n = & b_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + \ldots + & a_{nn}x_n = & b_1 \end{array} \qquad \text{oder kurz:} \quad A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = b$$

Gleichungssystem mit n Gleichungen für n Unbekannte. Dann gilt: Ist $\det A \neq 0$, so ist

$$x_k = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (\text{ für } k = 1, \ldots, n)$$

die (einzige) Lösung von I.

Bew.: $\det A \neq 0 \overset{(5.20)(\mathrm{ii})}{\Leftrightarrow} x \in \mathbb{R}^n \to Ax \in \mathbb{R}^n$ ist bijektiv. Also existiert genau eine Lösung von I, d.h. genau ein $x \in \mathbb{R}^n$: $Ax = b$. Sind $A_1, \ldots, A_n$ die Spaltenvektoren von A, so bedeutet $Ax = b$ gerade

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_nA_n = b \quad (\text{vgl. I!})$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} D_0(A_1, \ldots, A_{k-1}, b, A_{k+1}, \ldots, A_n) &= D_0(A_1, \ldots, A_{k-1}, \sum_{i=1}^n x_iA_i, A_{k+1}, \ldots, A_n) \\ &\overset{D_0 \text{ } n\text{-linear}}{=} \sum_{i=1}^n x_i D_0(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_i, A_{k+1}, \ldots, A_n) \\ &\overset{D_0 \text{ alternierend}}{=} x_k \det A. \end{aligned}$$

Eine weitere Erkenntnis, die uns die Determinante schenkt:

Nach (5.15)(iii) wissen wir, daß eine <u>reelle</u> quadratische Matrix $A \in K^{n\times n}$ genau dann in $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ liegt, wenn $\det A \neq 0$ gilt. Daraus folgt mit etwas Analysis: Für die "meisten" Matrizen ("für eine offene, dichte Menge" bzw. "für alle bis auf eine Menge vom Maß 0")

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt $A \in \mathrm{GL}_n(R)$. Speziell: "Typischerweise" ist ein System von n linearen Gleichungen für n (reelle) Unbekannte eindeutig lösbar. Oder geometrisch: "Typischerweise" schneiden sich (z.B.) zwei 3-dim. affine Unterräume des $\mathbb{R}^6$ in genau einem Punkt des $\mathbb{R}^6$ (2mal 3 lineare Gleichungen für 6 Unbekannte).

Zum Abschluß des Kapitels noch eine (i.a. nicht besonders praktische) Möglichkeit zum Berechnen von Determinanten - der Laplacesche Entwicklungssatz (Pierre Simon Laplace 1749-1827)).

(5.27) Lemma. Ist $\tilde{A} \in K^{(n-1)\times(n-1)}$ und $A := \begin{pmatrix} 1 & 0\dots 0 \\ 0 & \\ \vdots & \tilde{A} \\ 0 & \end{pmatrix} \in K^{n\times n}$, so gilt

$$\det A = \det \tilde{A}.$$

Bew.: Als Funktion der Spaltenvektoren von $\tilde{A}$ ist $\det A$ $(n-1)$-linear, alternierend, und für $\tilde{A} = E_{n-1}$ gilt $A = E_n$ und $\det E_n = 1$. Mit der Eindeutigkeitsaussage von (5.10) impliziert das: $\det \tilde{A} = \det A$.

Bez.: Zu $A \in K^{n\times n}$ und $1 \leq i, j \leq n$ bezeichne $A_{ij} \in K^{(n-1)\times(n-1)}$ die Matrix, die aus A durch Streichen der i'ten Zeile und der j'ten Spalte entsteht.

Bsp.:

$$A : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 8 & 7 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(5.28) Entwicklungssatz. *Für alle $A \in K^{n\times n}$, $j \in \{1, \dots, n\}$ gilt:*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \quad \textit{(Entwicklung nach der j'ten Spalte).}$$

Für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \quad \textit{(Entwicklung nach der i'ten Spalte).}$$

Bsp.:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \underset{\text{der 3. Spalte}}{\overset{\text{Entwicklung nach}}{=}} (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$\underset{\text{der 4. Zeile}}{\overset{\text{oder Entwicklung nach}}{=}} (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+4} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

Bew.: $A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \ldots, A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$ seien die Spaltenvektoren von A.

$$\begin{aligned} \det A &= D_0(A_1, \ldots, A_n) = D_0(A_1, \ldots, A_j = \sum a_{ij} e_i, \ldots, A_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} D_0(A_1, \ldots, A_{j-1}, e_i, A_{j+1} \ldots, A_n) \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen: $D_0(A_1, \ldots, A_{j-1}, e_i, A_{j+1} \ldots, A_n) = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$

$D_0(A_1, \ldots, A_{j-1}, e_i, A_{j+1} \ldots, A_n) = (-1)^{j-1} D_0(e_i, A_1, \ldots, A_{j-1}, A_{j+1}, \ldots, A_n)$

$$= (-1)^{j-1} \left|\begin{array}{lll|ll} 0 & a_{11} & \ldots & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & a_{i1} & \ldots & \ldots & a_{in} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \ldots & \ldots & a_{nn} \end{array}\right| = (-1)^{i+j-2} \left|\begin{array}{lll|ll} 1 & a_{i1} & \ldots & \ldots & a_{in} \\ 0 & a_{11} & \ldots & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{i-1,1} & \ldots & \ldots & a_{i-1,n} \\ 0 & a_{i+1,1} & \ldots & \ldots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \ldots & \ldots & a_{nn} \end{array}\right|$$

$$= (-1)^{i+j} \left|\begin{array}{lll|ll} 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & a_{11} & \ldots & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{i-1,1} & \ldots & \ldots & a_{i-1,n} \\ 0 & a_{i+1,1} & \ldots & \ldots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \ldots & \ldots & a_{nn} \end{array}\right|$$

$$\overset{(5.27)}{=} (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

(hierbei soll der senkrechte Strich in den Determinanten andeuten, daß die j'te Spalte gestrichen ist!)