6. Euklidische Vektorräume

Im folgenden sei V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{R}$.

(6.1) Def.: Eine Bilinearform $b : V \times V \to \mathbb{R}$ heißt

(i) symmetrisch $\Leftrightarrow \forall\, v, w \in V$: $b(v,w) = b(w,v)$
(ii) positiv definit $\Leftrightarrow \forall\, v \in V \setminus \{0\}$: $b(v,v) > 0$
(iii) Skalarprodukt $\Leftrightarrow b$ ist symmetrisch und positiv definit.

Bez.: Für ein Skalarprodukt b schreibt man oft: $\langle v, w\rangle := b(v,w)$. Ein reeller Vektorraum V mit einem Skalarprodukt $\langle , \rangle$ heißt ein <u>euklidischer Vektorraum</u>.

Bsp.: 1) $V = \mathbb{R}^n$, $\quad b(x,y) := \langle x, y\rangle := \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$

$$b(x,x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

2) $\quad V = C^0([0,2\pi], \mathbb{R}) = \{f \mid f : [0,2\pi] \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}$

$$b(f_1, f_2) := \langle f_1, f_2\rangle_{L^2} = \int_0^{2\pi} f_1(t) f_2(t)\, dt$$

(6.2) Def.: Sei $V, \langle , \rangle$ euklidischer Vektorraum. Dann heißt $\| v \| := \sqrt{\langle v, v\rangle} \geq 0$ die <u>Norm</u> (oder <u>Länge</u>) von $v \in V$ (bzgl. $\langle , \rangle$) und $\| v - w \|$ der <u>Abstand</u> zwischen v und w.

(6.3) Satz. *Sei $V, \langle , \rangle$ euklidischer Vektorraum. Dann gilt für alle $v, w \in V, \lambda \in \mathbb{R}$:*

(i) $\| v \| \geq 0$ *und:* $\| v \| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
(ii) $\| \lambda v \| = |\lambda|\, \| v \|$
(iii) $|\langle v, w\rangle| \leq \| v \| \| w \|$ *(Cauchy-Schwarzsche Ungleichung) mit "=" $\Leftrightarrow$ v und w sind linear abhängig.*
(iv) $\| v + w \| \leq \| v \| + \| w \|$ *(Dreiecksungleichung)*

Bew.:

(i) ist klar
(ii) $\| \lambda v \| = \sqrt{\langle \lambda v, \lambda v\rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle v, v\rangle} = |\lambda|\, \| v \|$
(iii) Es genügt, den Fall $w \neq 0$ zu betrachten. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle v + tw, v + tw\rangle &= \| v \|^2 + 2t\langle v, w\rangle + t^2 \| w \|^2 \\ &= \left(t \| w \| + \tfrac{\langle v,w\rangle}{\|w\|}\right)^2 + \| v \|^2 - \tfrac{\langle v,w\rangle^2}{\|w\|^2} \end{aligned}$$

Als Funktion von t nimmt $\langle v + tw, v + tw\rangle$ für $t_0 = -\frac{\langle v,w\rangle}{\|w\|^2}$ sein (nichtnegatives!) Minimum an. Daraus folgt (iii). Gleichheit in (iii) tritt genau dann ein, wenn dieses Minimum gleich Null ist, d.h. falls $\langle v + t_0 w, v + t_0 w\rangle = 0$. Daraus folgt, daß $v + t_0 w =$

0 gilt, d.h. v und w sind linear abhängig. Umgekehrt gilt für linear abhängige v und w offensichtlich Gleichheit in (iii).

(iv)
$$\begin{aligned} \| v+w \|^2 &= \langle v+w, v+w\rangle = \| v \|^2 + 2\langle v,w\rangle + \| v \|^2 \\ &\overset{\text{(iii)}}{\leq} \| v \|^2 + 2 \| v \| \| w \| + \| w \|^2 = (\| v \| + \| w \|)^2. \end{aligned}$$

(6.4) Def. Sei $V, \langle , \rangle$ euklidischer Vektorraum und $v, w \in V \setminus \{0\}$. Dann ist der Winkel $\varphi = \varphi(v,w) \in [0, \pi]$ zwischen v und w definiert durch:

$$\cos\varphi = \frac{\langle v,w\rangle}{\| v \| \| w \|} \qquad \text{bzw.} \qquad \varphi = \arccos \frac{\langle v,w\rangle}{\| v \| \| w \|} \in [0,\pi]$$

Bem. 1) (5.3)(iii) $\Rightarrow -1 \leq \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\| \|w\|} \leq 1$. $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ ist bijektiv mit Umkehrabbildung arccos.

2) $\varphi(v,w) = \varphi(w,v)$
3) v und w heißen orthogonal (senkrecht) zueinander $\Leftrightarrow \langle v,w\rangle = 0$
4) Die Definition von φ ist so eingerichtet, daß der "Kosinussatz" gilt:

$$\| v-w \|^2 = \| v \|^2 - 2\langle v,w\rangle + \| w \|^2 = \| v \|^2 + \| w \|^2 - 2\cos\varphi \| v \| \| w \| .$$

(6.5) Def.: Eine Teilmenge $S \subseteq V$ heißt Orthonormalsystem (ONS), falls gilt

(i) Für alle $v \in S$ gilt $\| v \| = 1$ ("*alle $v \in S$ normiert*") und
(ii) $v, w \in S$, $v \neq w \Rightarrow \langle v,w\rangle = 0$ ("*je zwei orthogonal*")
Eine Orthonormalbasis (ONB) ist ein Orthonormalsystem, das V erzeugt.

Bem.: S ONS $\Rightarrow$ S linear unabhängig: $v_1, \ldots, v_n \in S$ verschieden, $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$ und $\sum\limits_{i=1}^n r_i v_i = 0 \Rightarrow 0 = \langle \sum\limits_{i=1}^n r_i v_i, \sum\limits_{j=1}^n r_j v_j \rangle = \sum\limits_{i,j=1}^n r_i r_j \langle v_i, v_j\rangle = \sum\limits_{i=1}^n r_i^2 \Rightarrow$ alle $r_i = 0$.

Bsp.:

1) $V = \mathbb{R}^n$, $\langle x,y\rangle := \sum\limits_{i=1}^n x_i y_i \Rightarrow \{e_1, \ldots, e_n\}$ ist ONB von $(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$.
2) $V = C^0([0,2\pi], \mathbb{R})$, $\langle , \rangle = \langle , \rangle_{L^2}$.
Sei $f_0 \in V$ definiert durch $f_0(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ und für $k \geq 1$:

$$f_k(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kx), g_k(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx).$$

Dann ist $S = \{f_k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{g_k \mid k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ ein ONS.

(6.6) Satz:

(i) *(Besselsche Ungleichung). Ist* S ONS, $v \in V$ *und* $E \subseteq S$ *endlich, so gilt*

$$\sum_{e \in E} \langle v, e \rangle^2 \leq \| v \|^2 .$$

(ii) *Ist* $B = (v_1, \ldots, v_n)$ ONB *von* V*, so gilt*

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle v_i .$$

Bem.: Im Fall von Bsp. 2) heißen $a_k := \langle f, f_k \rangle_{L^2}$ für $k \geq 0$ (d.h. $a_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx$ für $k \geq 1$ und $a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{2\pi} f(x) dx$) und $b_k := \langle f, g_k \rangle_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx$ für $k \geq 1$ die Fourierkoeffizienten von $f \in V = C^0([0, 2\pi], \mathbb{R})$. Aus (6.6)(i) folgt:

$$a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \| f \|_{L^2}^2 = \int_0^{2\pi} f^2(x) dx.$$

In Wahrheit ist diese Ungleichung stets eine Gleichheit (man sagt zu dieser Eigenschaft, daß dieses S ein <u>vollständiges</u> ONS ist), aber das können wir hier nicht beweisen.

Bew.: (i) $0 \leq \| v - \sum\limits_{e \in E} \langle v, e \rangle e \| = \| v \|^2 - 2 \sum\limits_{e \in E} \langle v, e \rangle^2 + \sum\limits_{e \in E} \langle v, e \rangle^2$

(ii) $(v_1, \ldots, v_n)$ Basis $\Rightarrow \exists r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R} : v = \sum\limits_{j=1}^{n} r_j v_j \Rightarrow \langle v, v_i \rangle = \sum\limits_{j=1}^{n} r_j \langle v_j, v_i \rangle = r_i$

(6.7) Satz (Gram-Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren). *Seien* $v_1, \ldots, v_k \in V$ *linear unabhängig. Dann existiert ein* ONS $\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_k \in V$ *mit* $\text{span}\{v_1, \ldots, v_i\} = \text{span}\{\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_i\}$ *für alle* $1 \leq i \leq k$*. Insbesondere: Ist* V *endlichdimensional, so existiert eine* ONB *von* V*.*

Bew.: Induktion nach k:

$$k = 1 : \tilde{v}_1 = \frac{1}{\| v_1 \|} v_1 \quad (v_1 \neq 0!)$$

Induktionsschritt: Nach Induktionsvoraussetzung existiert ein ONS $\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_{k-1}$ mit

$$\text{span}\{v_1, \ldots, v_i\} = \text{span}\{\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_i\} \text{ für alle } 1 \leq i \leq k-1.$$

Setze $w_k = v_k - \sum\limits_{j=1}^{k-1} \langle v_k, \tilde{v}_j \rangle \tilde{v}_j \quad (\Rightarrow \langle w_k, \tilde{v}_i \rangle = 0$ für $1 \leq i \leq k-1)$ und $\tilde{v}_k := \frac{1}{\|w_k\|} w_k$. Dann ist $\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_k$ ONS und $\text{span}\{\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_k\} = \text{span}\{v_1, \ldots, v_k\}$.

(6.8) Def. Seien $V, \langle , \rangle$ und $\tilde{V}, \widetilde{\langle , \rangle}$ euklidische Vektorräume. Ein $L \in \text{Hom}(V, \tilde{V})$ heißt orthogonal(bzgl. $\langle , \rangle$ und $\widetilde{\langle , \rangle}$), falls für alle $v, w \in V$ gilt: $\langle v, w \rangle = \widetilde{\langle L(v), L(w) \rangle}$.

Bem.:

1) L orthogonal $\Rightarrow L$ injektiv $(L(v) = 0 \Rightarrow \| L(v) \|^2 = \| v \|^2 = 0 \Rightarrow v = 0)$
   Speziell: Gilt $\dim V = \dim \tilde{V} < \infty$, so ist jede orthogonale Abbildung bijektiv.
2) Sei $\tilde{V} = V, \dim V < \infty, \tilde{\langle , \rangle} = \langle , \rangle$. Dann bilden die orthogonalen $L \in \mathrm{End}(V)$ eine Untergruppe von $(\mathrm{Aut}(V), \circ)$, die orthogonale Grupe $O(V)$ von V.

(6.9) Folgerung. Ist $V, \langle , \rangle_V$ euklidischer Vektorraum, $\dim V = n$, so existiert eine (bijektive) orthogonale Abbildung $L : (V, \langle , \rangle_V) \to (\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$.

Bew.: Sei $f_1, \ldots, f_n$ ONB von V. Definiere L durch $L(f_i) = e_i \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{array}{rclrclrcl} \text{Ist } v & = & \sum r_i f_i \text{ und } w & = & \sum s_j f_s \text{ so folgt} & \langle v, w \rangle_V & = & \sum r_i s_i. \\ \text{Daraus folgt } L(v) & = & \sum r_i e_i, L(w) & = & \sum s_j e_j \text{ und} & \langle L(v), L(w) \rangle & = & \sum r_i s_i = \langle v, w \rangle_V. \end{array}$$

(6.10) Satz. *Sei* $L \in \mathrm{End}(V)$ *und* $\mathcal{G} = (e_1, \ldots, e_n)$ ONB *von* V *und* $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{G}}(L)$.

$$\textit{Dann gilt: } L \in O(V) \Leftrightarrow A^T A = E_n \quad (\Leftrightarrow A^T = A^{-1})$$

Bew.:
$$\begin{aligned} \delta_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle &= \langle L(e_i), L(e_j) \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n a_{ki} e_k, \sum_{l=1}^n a_{lj} e_l \right\rangle \\ &= \sum_{k,l=1}^n a_{ki} a_{lj} \delta_{kl} = \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj} \end{aligned}$$
$\Leftrightarrow A^T A = E_n$.

Die Hauptachsentransformation

Im folgenden sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle , \rangle$ und $b : V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform. Ist $(e_1, \ldots, e_n)$ eine Basis von V und sind $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$ beliebige Vektoren in V, so folgt aus der Bilinearität von b:

$$b(x, y) = b\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j\, b(e_i, e_j).$$

Man nennt die Matrix $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $b_{ij} = b(e_i, e_j)$ die <u>Matrix</u> <u>von</u> b bzgl. der Basis $(e_1, \ldots, e_n)$. Ist b symmetrisch (wie wir vorausgesetzt haben), so gilt $b_{ij} = b(e_i, e_j) = b(e_j, e_i) = b_{ji}$, d.h. $B = B^\top$ (solche Matrizen heißen symmetrisch). Es gilt dann für $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$:

$$b(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i b_{ij} y_j = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

wobei der letzte Term als Produkt von Matrizen zu interpretieren ist.

Besonders einfach zu verstehen ist eine Bilinearform b, deren Matrix (bzgl. $e_1, \dots, e_n$) eine Diagonalmatrix $b_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$ ist. Dann gilt:

$$b(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i y_i.$$

Zum Beispiel ist ein soches b genau dann positiv definit, wenn alle λ_i (für $i = 1, \dots, n$) positiv sind.

(6.11) Satz (Hauptachsentransformation). *Zu jeder symmetrischen Bilinearform $b : V \times V \to \mathbb{R}$ existiert eine* ONB $f_1, \dots, f_n$ *von V und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, so daß für alle $x = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$, $y = \sum_{j=1}^{n} y_j f_j$ in V gilt*

$$b(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i y_i.$$

Anders ausgedrückt: Es existiert stets eine ONB *von V, bezüglich derer die Matrix von b eine Diagonalmatrix ist. (Die λ_i sind dann gerade die Diagonalelemente der Matrix.)*

Herkunft der Bezeichnung "Hauptachsentransformation": Ist $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ positiv definite, symmetrische Bilinearform, so ist die Menge

$$E = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid b(x, x) = 1\}$$

eine Ellipse. Satz (6.11) besagt, daß es eine ONB f_1, f_2 (bzgl. des üblichen Skalarprodukts) gibt, so daß

$$E = \{x = x_1 f_1 + x_2 f_2 \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = 1\}$$

gilt, d.h. die Geraden durch $0 \in \mathbb{R}^2$ in Richtung f_1 bzw. f_2 sind die "Hauptachsen" der Ellipse E mit zugehörigen Achsenabschnitten der Länge $(\lambda_1)^{-\frac{1}{2}}$ bzw. $(\lambda_2)^{-\frac{1}{2}}$.

Satz (6.11) spielt in folgendem Zusammenhang in der Analysis II eine Rolle ("Kurvendiskussion für Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$"): Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $h \in \mathbb{R}^n$, so gilt (siehe Analysis II)

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \mathrm{Df}(x_0)(h) + \frac{1}{2}\,\mathrm{D^2f}(x_0)(h, h) + R_{f,x_0}(h),$$

wobei $\mathrm{Df}(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ linear (1. Ableitung von f an der Stelle x_0),
$\mathrm{D^2f}(x_0) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ symmetrisch, bilinear (2. Ableitung von f an der Stelle x_0),

und $R_{f,x_0}(h)$ eine Funktion mit $\lim_{h\to 0} \frac{R_{f,x_0}(h)}{\|h\|^2} = 0$ ist. x_0 heißt <u>kritischer</u> <u>Punkt</u> von f, falls $\mathrm{Df}(x_0) = 0$ gilt. Aus (6.11) folgt, daß man eine ONB des $\mathbb{R}^n$ finden kann, bzgl. derer $\mathrm{D^2f}(x_0)(h, h) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i h_i^2$ gilt. Daraus folgt für einen kritischen Punkt x_0 von f:

$$\text{alle } \lambda_i > 0 \ (\Leftrightarrow \mathrm{D^2f}(x_0) \text{ positiv definiert}) \ \Rightarrow \ x_0 \text{ lokales Minimum.}$$
$$\text{alle } \lambda_i < 0 \ (\Leftrightarrow \mathrm{D^2f}(x_0) \text{ negativ definiert}) \ \Rightarrow \ x_0 \text{ lokales Maximum.}$$

Im Gegensatz zum (aus der Schule bekannten) Fall $n = 1$ gibt es für $n > 1$ noch andere wichtige Möglichkeiten für $D^2 f(x_0)$: Es kann z.B. für $n = 2$ $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 < 0$ gelten. Dann sieht der Graph von f in einer Umgebung von x_0 wie eine "Sattelfläche" aus.

Vorbereitung zum Beweis von Satz (6.11):

Wegen (6.9) können wir annehmen, daß $V = \mathbb{R}^n$, $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ gilt. Ist nämlich $L : \mathbb{R}^n \to V$ orthogonal, so betrachte $\tilde{b} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\tilde{b}(x, y) := b(L(x), L(y))$. Haben wir die Behauptung für $\tilde{b}$ bewiesen, so folgt sie leicht auch für b. (Als gesuchte ONB von V kann gerade das Bild unter L einer ONB des $\mathbb{R}^n$ genommen werden, die $\tilde{b}$ diagonalisiert.)

Unter leichtem Missbrauch der Bezeichnung verwenden wir B auch als Symbol für die lineare Abbildung $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $B(e_i) = \sum_{j=1}^n b_{ij} e_j = \sum_{j=1}^n b_{ji} e_j$. Dann gilt:

(6.12) Lemma. $b(x, y) = \langle B(x), y\rangle = \langle x, B(y)\rangle$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Bem.: Ein $B \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^n)$ mit $\langle B(x), y\rangle = \langle x, B(y)\rangle$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ heißt "selbstadjungiert".

$$\begin{aligned}\text{Bew.: } \langle B(x), y\rangle &= \langle B\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right), \sum_{k=1}^n y_k e_k\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n x_i y_k \langle B(e_i), e_k\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_k b_{ij} \underbrace{\langle e_j, e_k\rangle}_{=\delta_{jk}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j b_{ij} \\ &= b(x, y)\end{aligned}$$

Da b symmetrisch ist, folgt daraus:

$$\langle x, B(y)\rangle = \langle B(y), x\rangle = b(y, x) = b(x, y) = \langle B(x), y\rangle.$$

Satz (6.11) ist also äquivalent dazu, daß es für jedes selbstadjungierte $B \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^n)$ eine ONB $f_1, \ldots, f_n$ des $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren von B gibt. Sind dann $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die zugehörigen Eigenwerte von B, d.h. $B(f_i) = \lambda_i f_i$ für $i = 1, \ldots, n$, so gilt:

$$b_{ij} = b(f_i, f_j) = \langle B(f_i), f_j\rangle = \lambda_i \langle f_i, f_j\rangle = \lambda_i \delta_{ij}, \text{ wie in (6.11) behauptet.}$$

Im ersten (schwierigeren) Schritt zeigen wir:

1. Schritt: B besitzt einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$.
Sei $\tilde{B} \in \operatorname{End}(\mathbb{C}^n)$ die $\mathbb{C}$-lineare Fortsetzung von $B \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^n)$ auf $\mathbb{C}^n$, d.h. $\tilde{B}(z_1, \ldots, z_n) = \left(\sum_{i=1}^n b_{1i} z_i, \sum_{i=1}^n b_{2i} z_i, \ldots, \sum_{i=1}^n b_{ni} z_i\right)$. Wir verwenden nun (ohne das bewiesen zu haben), daß $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist. Daraus folgt, daß es einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von $\tilde{B}$ gibt (vgl. (5.24) und die daran anschließenden Bemerkungen).

Wir wollen zeigen, daß in Wahrheit $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt. Sei $v = x + iy \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ mit $x, y \in \mathbb{R}^n$ ein EV zum EW $\lambda = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, von $\tilde{B}$. Dann gilt

$$\tilde{B}(x + iy) = B(x) + iB(y) \text{ mit } B(x), B(y) \in \mathbb{R}^n$$

und andererseits wegen $\tilde{B}(v) = \lambda v$:

$$\tilde{B}(x + iy) = (\alpha + i\beta)(x + iy) = (\alpha x - \beta y) + i(\beta x + \alpha y).$$

Also:

$$(*) \qquad B(x) = \alpha x - \beta y \text{ und } B(y) = \beta x + \alpha y$$

Aus $(*)$ folgt mit (6.12):

$$\langle B(x), y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle - \beta \parallel y \parallel^2 = \langle x, B(y)\rangle = \beta \parallel x \parallel^2 + \alpha\langle x, y\rangle.$$

Also $0 = \beta(\parallel x \parallel^2 + \parallel y \parallel^2)$, woraus wegen $\parallel x \parallel^2 + \parallel y \parallel^2 > 0$ (da $v \neq 0$!) $\beta = 0$ folgt, d.h. $\lambda = \alpha \in \mathbb{R}$ und, nach $(*)$,

$$B(x) = \lambda x, B(y) = \lambda y.$$

Da $v = x + iy \neq 0$ gilt, sind nicht beide x und y der Nullvektor, d.h. mindestens einer von beiden ist ein Eigenvektor von B (zum EW $\lambda = \alpha \in \mathbb{R}$).

2. Schritt: Induktion über $n = \dim \mathbb{R}^n$.
$n = 1$: Wähle $f_1 := e_1 \in \mathbb{R}^1$. Dann gilt: $b(x_1 e_1, x_1 e_1) = x_1^2 \underbrace{b(e_1, e_1)}_{=:\lambda_1}$.
$n > 1$: Wähle als $f_1 \in \mathbb{R}^n$ einen (nach Schritt 1 existierenden) Eigenvektor von B, der ohne Einschränkung als normiert angenommen werden kann, d.h. $\parallel f_1 \parallel = 1$. Betrachte

$$(**) \qquad U := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, f_1\rangle = 0\}.$$

Dann ist U ein $(n-1)$-dimensionaler Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ (vgl. (3.24)) und die Restriktion $\langle , \rangle \mid U \times U$ von $\langle , \rangle$ auf U ist ein Skalarprodukt auf U. Entscheidend ist nun, daß $B(U) \subseteq U$ gilt: Ist $x \in U$, d.h. $x \in \mathbb{R}^n$ und $\langle x, f_1\rangle = 0$, so folgt $B(x) \in \mathbb{R}^n$ und

$$\langle B(x), f_1\rangle \overset{(6.12)}{=} \langle x, B(f_1)\rangle = \langle x, \lambda_1 f_1\rangle = \lambda_1\langle x, f_1\rangle = 0,$$

d.h. $B(x) \in U$. $B \mid U$ ist also ein selbstadjungierter Endomorphismus von U, so daß nach der Induktionsvoraussetzung die Existenz einer ONB $f_2, \ldots, f_n$ von U aus Eigenvektoren von $B \mid U$ ($\Rightarrow$ von B) existiert. Wegen $(**)$ ist dann $f_1, \ldots, f_n$ eine ONB des $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren von B.