Orthogonales Komplement und Orthogonalprojektion

Wir betrachten weiterhin einen euklidischen Vektorraum $V, \langle , \rangle$.

(6.13) Def.: Ist $M \subseteq V$, so heißt

$$M^\perp := \{v \in V \mid \forall w \in M : \langle v, w \rangle = 0\}$$

das orthogonale Komplement von M.

(6.14) Fakt.

(i) $M^\perp$ ist Untervektorraum von V.
(ii) $M_1 \subseteq M_2 \subseteq V \Rightarrow M_2^\perp \subseteq M_1^\perp$
(iii) $M^\perp = (\operatorname{span}(M))^\perp$
(iv) $M \subseteq (M^\perp)^\perp$

Bew. von (iii): Wegen (ii) genügt es, $M^\perp \subseteq (\operatorname{span}(M))^\perp$ zu beweisen. Sei also $v \in M^\perp$. Wir müssen zeigen, daß für alle $w \in \operatorname{span}(M)$ gilt: $\langle v, w \rangle = 0$. Zu jedem $w \in \operatorname{span}(M)$ existieren $k \in \mathbb{N}$, $r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{R}$ und $w_1, \ldots, w_k \in M$:

$$w = \sum_{i=1}^{k} r_i w_i \qquad \text{(siehe (3.7))}.$$

Wegen $v \in M^\perp$ und $w_i \in M$ gilt $\langle v, w_i \rangle = 0$ für $1 \le i \le k$. Also:

$$\langle v, w \rangle = \langle v, \sum_{i=1}^{k} r_i w_i \rangle = \sum_{i=1}^{k} r_i \langle v, w_i \rangle = 0.$$

Bsp.: $V = \mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt

$$\begin{aligned} M = \{e_1, e_2\} &\Rightarrow \operatorname{span}(M) = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \\ M^\perp = (\operatorname{span}(M))^\perp &= \{(0,0)\} \times \mathbb{R} \end{aligned}$$

(6.15) Satz. *Sei* $\dim V < \infty$. *Dann gilt für jeden Untervektorraum* U *von* V*:*

$$U \oplus U^\perp = V \quad \textit{und} \quad (U^\perp)^\perp = U.$$

Speziell: $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$.

Bew.: Sei $\dim U =: k$. Ergänze eine Basis $(v_1, \ldots, v_k)$ von U zu einer Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von V, vgl. (3.16). Nach (6.7) (Gram-Schmidt) existiert eine ONB $(w_1, \ldots, w_n)$ von V, so daß

$$\operatorname{span}\{w_1, \ldots, w_k\} = \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_k\} = U$$

gilt. Wir zeigen, daß $U^\perp = \operatorname{span}\{w_{k+1}, \ldots, w_n\}$ gilt. Denn:

(i) Ist $i \le k < j$, so gilt $\langle w_i, w_j \rangle = 0$, also $w_j \in \{w_1, \ldots, w_k\}^\perp = U^\perp$. Wegen (6.14)(i) folgt $\operatorname{span}\{w_{k+1}, \ldots, w_n\} \subseteq U^\perp$.

(ii) Ist $v = \sum_{j=1}^{n} r_j w_j \in U^\perp$, so gilt für $1 \leq i \leq k$:

$$0 = \langle v, w_i \rangle = \sum_{j=1}^{n} r_j \langle w_j, w_i \rangle = r_i.$$

Also $v = \sum_{j=k+1}^{n} r_j w_j \in \operatorname{span}\{w_{k+1}, \dots, w_n\}^\perp$.

Aus $U = \operatorname{span}\{w_1, \dots, w_k\}$ und $U^\perp = \operatorname{span}\{w_{k+1}, \dots, w_n\}$ folgt $V = U \oplus U^\perp$ und $(U^\perp)^\perp = U$.

Bem.: 1) Der Beweis von (6.15) liefert ein Rechenverfahren zur Bestimmung einer ONB $\{w_1, \dots, w_n\}$ von V, so daß $\{w_1, \dots, w_k\}$ eine ONB von U und $\{w_{k+1}, \dots, w_n\}$ eine ONB von $U^\perp$ ist.
2) (6.15) gilt nicht ohne die Voraussetzung $\dim V < \infty$!

Ist U Untervektorraum eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraums V, so ist $U^\perp$ ein zu U komplementärer Vektorraum, vgl. (3.21). Unter den vielen zu U komplementären Untervektorräumen ist $U^\perp$ durch die Eigenschaft ausgezeichnet, daß jedes $v \in U^\perp$ zu allen $u \in U$ orthogonal ist (d.h. der Name "orthogonales Komplement"). Ist $\dim V = \infty$, so kann $U \oplus U^\perp \subsetneqq V$ gelten. In diesem Fall ist das orthogonale Komplement $U^\perp$ also <u>kein</u> zu U komplementärer Unterraum. (Ein "orthogonales Komplement" ist also nicht notwendig ein "Komplement". So etwas tritt in der mathematischen Sprache öfters auf, wie auch in der Umgangssprache, in der mit einem "tollen Hecht" oft kein Hecht gemeint ist.)

(6.16) Def.: Sei U Untervektorraum von V und $V = U \oplus U^\perp$. Dann existiert für jedes $v \in V$ genau ein Paar $(u_0, u_1) \in U \times U^\perp$, so daß $v = u_0 + u_1$ gilt. Die Abbildung $P_U : V \to U$, $P_U(v) := u_0$, heißt <u>Orthogonalprojektion von</u> V <u>auf</u> U.

Bem.:

0) $P_U(v)$ ist durch die Eigenschaften $P_U(v) \in U$ und $v - P_U(v) \in U^\perp$ eindeutig bestimmt.
1) $P_U \in \operatorname{Hom}(V, U)$.
2) Für alle $u \in U$ gilt $P_U(u) = u$ (d.h. $P_U|U = \mathrm{id}_U$) und für alle $v \in U^\perp$ gilt $P_U(v) = 0$.
3) Ist $(v_1, \dots, v_k)$ ONB von U, so gilt für alle $v \in V$:

$$P_U(v) = \sum_{i=1}^{k} \langle v, v_i \rangle v_i.$$

4) Ist $(v_{k+1}, \dots, v_n)$ ONB von $U^\perp$, so gilt für alle $v \in V$:

$$P_U(v) = v - \sum_{i=k+1}^{n} \langle v, v_i \rangle v_i.$$

Bez.: Ist $\emptyset \neq M \subseteq V$ und $v \in V$, so heißt

$$d(v, M) := \inf\{\|v - u\| \mid u \in M\}$$

der Abstand von v zu M.

(6.17) Satz. *Sei $U \subseteq V$ Untervektorraum und $V = U \oplus U^{\perp}$. Dann gilt für jedes $v \in V$: Es existiert genau ein $\overline{u} \in U$ mit $d(v, U) = \|v - \overline{u}\|$, nämlich $\overline{u} = P_U(v)$.*
Speziell gilt: $d(v, U) = \|v - P_U(v)\|$.

Bew.: Sei $u \in U$ beliebig. Zerlege $v = P_U(v) + (v - P_U(v))$, wobei $P_U(v) \in U$, $(v - P_U(v)) \in U^{\perp}$. Dann gilt

$$\|v - u\|^2 = \|(P_U(v) - u) + (v - P_U(v))\|^2 = \|(P_U(v) - u)\|^2 + \|v - P_U(v)\|^2.$$

Also $\|v - u\| \geq \|v - P_U(v)\|$, wobei Gleichheit genau für $u = P_U(v)$ eintritt.

Bsp.: Approximation komplizierter Funktionen durch einfache: die Fourierentwicklung. Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum

$$V = C^0([0, 2\pi], \mathbb{R}) = \{f \mid f : [0, 2\pi] \to \text{stetig}\}$$

mit dem sogenannten L^2-Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_0^{2\pi} f(x) g(x) dx$$

und dem ONS $f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $f_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kx)$, $g_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx)$, vgl. Bsp. 1 nach (6.1) und Bsp. nach (6.5). Es sei

$$U_n := \operatorname{span}\{f_0, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n\}.$$

Wegen Bem. 3 nach (6.16) gilt für alle $f \in V$:

$$(*) \qquad P_{U_n}(f) = \sum_{k=0}^{n} \langle f, f_k \rangle f_k + \sum_{k=1}^{n} \langle f, g_k \rangle g_k.$$

Im Gegensatz zu dem nach (6.6) geschriebenen, definiert man üblicherweise die Fourierkoeffizienten $a_k = a_k(f)$ und $b_k = b_k(f)$ durch

$$\begin{aligned} a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx &= \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \langle f, f_0 \rangle & \text{für } k = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle f, f_k \rangle & \text{für } k > 0 \end{cases} \\ b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle f, g_k \rangle \text{ für } k > 0. \end{aligned}$$

Damit schreibt sich $(*)$ als

$$P_{U_n}(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right).$$

Satz (6.17) besagt, daß $P_{U_n}(f)$ das eindeutig bestimmte Element von U_n mit minimalem L^2-Abstand von f ist, d.h. die beste (L^2-)Approximation von f durch ein Element von U_n. Die (hier nicht bewiesene) Tatsache, daß $\{f_0\} \cup \{f_k, g_k \mid k > 0\}$ ein vollständiges ONS bilden, heißt gerade, daß für jedes $f \in V$ gilt

$$\left(\lim_{n\to\infty} d(f, U_n) =\right) \lim_{n\to\infty} \|f - P_{U_n}(f)\| = 0.$$

Die Gramsche Determinante (J.P. Gram, dän. Math. 1850-1916)

(6.18) Satz. *Sei V euklidischer Vektorraum, $0 < \dim V = n < \infty$. Dann existieren genau zwei Determinantenformen $\pm D$ auf V, so daß gilt:*

$$\textit{Ist } v_1, \ldots, v_n \,\text{ONB } \textit{ von } V, \textit{so gilt } |\pm D(v_1, \ldots, v_n)| = 1.$$

Bez.: Ein solches D heiße <u>normierte</u> Determinantenform des euklidischen Vektorraums V.

Bew.: Existenz: Sei $(\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n)$ eine (feste) ONB vn V. Nach (5.10) existiert genau eine Determinantenform D von V mit

$$D(\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n) = 1.$$

Wir müssen zeigen, daß dann für jede ONB $(v_1, \ldots, v_n)$ von V $|D(v_1, \ldots, v_n)| = 1$ gilt. Sei $L \in \operatorname{End} V$ durch $L(\overline{v}_i) = v_i$ für $1 \le i \le n$ definiert. Nach Definition (5.19) gilt:

$$D(v_1, \ldots, v_n) = \det L \;\; D(\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n) = \det L.$$

Nach (6.10) gilt für die Matrix A von L bzgl. $(v_1, \ldots, v_n)$:

$$A^T A = E_n.$$

Also $1 = \det E_n = \det(A^T A) \overset{(5.20)}{=} \det A^T \det A \overset{(5.17)}{=} (\det A)^2 \overset{(5.21)}{=} (\det L)^2$ und damit

$$|D(v_1, \ldots, v_n| = |\det L| = 1.$$

Daß $\pm D$ die einzigen solchen Determinantenformen sind, folgt direkt aus (5.10).

Aus Satz (6.18) folgt, daß in endlich-dimensionalen euklidischen Vektorräumen $(V, \langle,\rangle)$ ein natürlicher Volumenbegriff für Parallelotope existiert. Ist D eine normierte Determinantenform und sind $w_1, \ldots, w_n \in V$, so definieren wir

$$\operatorname{vol}_n^{\langle,\rangle}(P(w_1, \ldots, w_n)) := |D(w_1, \ldots, w_n)|.$$

Ist $(v_1, \ldots, v_n)$ eine ONB von V, so nennt man $P(v_1, \ldots, v_n)$ einen Würfel der Kantenlänge 1, und es folgt:

$$\operatorname{vol}_n^{\langle,\rangle}(P(v_1, \ldots, v_n)) = 1.$$

Die Gramsche Determinante berechnet $\operatorname{vol}_n^{\langle,\rangle}(P(w_1, \ldots, w_n))$ mittels der Skalarprodukte $\langle w_i, w_k \rangle$ für $1 \le i, k \le n$:

(6.19) Satz (Gramsche Determinante). *Sei* $(V, \langle,\rangle)$ *n-dimensionaler euklidischer Vektorraum und* $w_1, \ldots, w_n \in V$. *Dann gilt*

$$\mathrm{vol}_n^{\langle,\rangle}(P(w_1, \ldots, w_n)) = \sqrt{\det((\langle w_i, w_k\rangle)_{1\le i,k\le n})}.$$

Bsp.: Wir betrachten $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt. Dann ist D_0 eine normierte Determinantenform, da $D_0(e_1, e_2) = 1$. In diesem Fall sagt (6.19):

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_2^{\langle,\rangle}(P(w_1, w_2)) &= \sqrt{\det\begin{pmatrix}\langle w_1, w_1\rangle & \langle w_1, w_2\rangle \\ \langle w_2, w_1\rangle & \langle w_2, w_2\rangle\end{pmatrix}} = \sqrt{\|w_1\|^2\|w_2\|^2 - \langle w_1, w_2\rangle^2} \\ &= \|w_1\|\|w_2\|\sqrt{1-\cos^2\varphi} = \|w_1\|\|w_2\|\sin\varphi,\end{aligned}$$

wobei φ den Winkel zwischen w_1 und w_2 bezeichnet. Das ist die Formel für die Fläche des Parallelogramms $P(w_1, w_2)$ mit den Seitenlängen $\|w_1\|$ und $\|w_2\|$ und dem eingeschlossenen Winkel φ.

Beweis von (6.19): Sei $\mathcal{G} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine ONB von V und $L \in \mathrm{End}(V)$ durch $L(v_j) = w_j$ für $1 \le j \le n$ definiert. Dann ist $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{G}}(L)$ durch

$$w_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i$$

definiert, und es gilt mit einer normierten Determinantenform D:

$(*)$ $\quad \mathrm{vol}_n^{\langle,\rangle}(P(w_1, \ldots, w_n)) = |D(w_1, \ldots, w_n)| = |\det A||D(v_1, \ldots, v_n)| = |\det A|.$

Andererseits:

$$\begin{aligned}\langle w_i, w_k\rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^n a_{ji}v_j, \sum_{l=1}^n a_{lk}v_l\right\rangle = \sum_{j,l=1}^n a_{ji}a_{lk}\underbrace{\langle v_j, v_l\rangle}_{=\delta_{jl}} = \sum_{j=1}^n a_{ji}a_{jk} \\ &= (A^T\cdot A)_{ik}\end{aligned}$$

Also: $(\langle w_i, w_k\rangle)_{1\le i,k\le n} = A^TA$.

Daraus folgt: $(**)$ $\det(\langle w_i, w_k\rangle)_{1\le i,k\le n} = \det(A^TA) = (\det A)^2$.

Aus $(*)$ und $(**)$ folgt die Behauptung.

Jeder Unterraum U eines euklidischen Vektorraums $(V, \langle,\rangle)$ "erbt" das Skalarprodukt von V, d.h. $\langle,\rangle \mid U \times U$ ist ein Skalarprodukt auf U. Damit ist auch das Volumen von k $(\le n)$-dimensionalen Parallelotopen in V definiert:

Sind $v_1, \ldots, v_k \in V$ linear unabhängig, so heißt

$$P(v_1, \ldots, v_k) = \left\{\sum_{i=1}^k s_i v_i \mid 0 \le s_i \le 1\right\} \subseteq \mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_k\}$$

das von $v_1, \ldots, v_k$ aufgespannte (k-dimensionale) Parallelotop.

Ist D^U normierte Determinantenform auf $U := \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_k\}$, so besagt (6.19)

$$|D^U(v_1, \dots, v_k)| = \sqrt{\det((\langle v_i, v_j \rangle)_{1 \le i,j \le k})}$$

und wir definieren diesen Wert als das k-dimensionale Volumen $\operatorname{vol}_k^{\langle,\rangle}(P(v_1, \dots, v_k))$ von $P(v_1, \dots, v_k)$. Sind $v_1, \dots, v_k$ linear abhängig, so definieren wir $\operatorname{vol}_k^{\langle,\rangle}(P(v_1, \dots, v_k)) = 0$.