Orthogonale Abbildungen

Wir wollen orthogonale Endomorphismen $L \in O(V)$ eines euklidischen Vektorraums $(V, \langle , \rangle)$ untersuchen.

Erinnerung (an Def. (6.8)):

$$L \in O(V) \Leftrightarrow L \in \mathrm{End}(V) \text{ und für alle } v, w \in V \text{ gilt } \langle L(v), L(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

Solche $L \in O(V)$ sind stets injektiv und damit – falls $\dim V < \infty$ – auch surjektiv. Wir setzen voraus, daß $\dim V = n < \infty$ gilt. Dann ist $O(V)$ eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}(V)$ (mit der Hintereinanderausführung von Abbildungen als Gruppenoperation). Nach Satz (6.10) gilt: Ist $\mathcal{G} = (v_1, \ldots, v_n)$ ONB von V, ist $L \in \mathrm{End}(V)$ und $A := \mathrm{Mat}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{G}}(L)$, so gilt:

$$L \in O(V) \Leftrightarrow A^T \cdot A = E_n.$$

Speziell folgt daraus (wie im Beweis von (6.18) schon benutzt):

$$L \in O(V) \Rightarrow |\det L| = |\det A| = 1.$$

(6.20) Def.: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt orthogonal $\Leftrightarrow A^T A = E_n$

$O(n) := \{A \mid A \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ orthogonal}\}$

$SO(n) := \{A \mid A \in O(n),\ \det A = 1\} = O(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$

$SO(V) := \{L \mid L \in O(V),\ \det L = 1\}$

Da $\mathrm{Mat}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{G}} : (\mathrm{Aut}(V), \circ) \to (\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot)$ ein Gruppenisomorphismus ist (vgl. (4.18)), ist $O(n) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{G}}(O(V))$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Ebenso ist $SO(n)$ (bzw. $SO(V)$) Untergruppe von $O(n)$ (bzw. von $O(V)$).

Wir beschäftigen uns zunächst mit dem Spezialfall $V = \mathbb{R}^2$, $\langle , \rangle =$ Standardskalarprodukt, d.h.

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

Beispiele von Elementen in $O(\mathbb{R}^2)$:

1) "Drehungen": Sei $\varphi \in \mathbb{R}$ und $D_\varphi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ mit

$$\mathrm{Mat}(D_\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}(D_\varphi)^T \cdot \mathrm{Mat}(D_\varphi) &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2\varphi + \sin^2\varphi & 0 \\ 0 & \cos^2\varphi + \sin^2\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

d.h. $\mathrm{Mat}(D_\varphi) \in O(2)$ und damit $D_\varphi \in O(\mathbb{R}^2)$. Wegen

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = 1 \text{ gilt sogar } D_\varphi \in SO(\mathbb{R}^2), \mathrm{Mat}(D_\varphi) \in SO(2).$$

Offenbar gilt $D_{\varphi+2\pi} = D_\varphi$ und $D_\varphi \neq D_\psi$, falls $0 \leq \varphi < \psi < 2\pi$.

2) "Spiegelungen an Geraden durch $0 \in \mathbb{R}^2$": Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ 1-dimensionaler Untervektorraum. Wähle eine ONB $\mathcal{G} = (v_1, v_2)$ des $\mathbb{R}^2$ mit $\operatorname{span}\{v_1\} = U$. Definiere "die Spiegelung $S_U \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^2)$ an U" durch

$$S_U(v_1) = v_1, S_U(v_2) = -v_2.$$

Dann gilt $S_U \in O(\mathbb{R}^2) \setminus SO(\mathbb{R}^2)$, da $\operatorname{Mat}^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}(S_U) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in O(2) \setminus SO(2)$.

S_U ist durch U eindeutig bestimmt!

(6.21) Fakt. Es gilt:

(i) $SO(\mathbb{R}^2) = \{D_\varphi | \varphi \in [0, 2\pi)\}$.
(ii) $O(\mathbb{R}^2) = \{S_U | U$ 1-dimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^2\}$.
(iii) $\forall \varphi, \psi \in \mathbb{R} : D_{\varphi+\psi} = D_\varphi \circ D_\psi (= D_\psi \circ D_\varphi), D_0 = \operatorname{id}_{\mathbb{R}^2}$ (d.h. $\varphi \in (\mathbb{R}, +) \to D_\varphi \in (SO(\mathbb{R}^2), \circ)$ ist surjektiver Gruppenhomomorphismus).

$$D_\varphi = \operatorname{id}_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \varphi \in \{2\pi k | k \in \mathbb{Z}\}$$

(iv) $S_{U_2} \circ S_{U_1} = D_{2\varphi}$, wobei φ der Winkel ist, um den man U_1 drehen muß, um U_2 zu erhalten, d.h. $D_\varphi(U_1) = U_2$. (φ ist bis auf additive Vielfache $\varphi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, von π bestimmt.)
(v) $D_{2\varphi} \circ S_U = S_{D_\varphi(U)}, S_U \circ D_{2\varphi} = S_{D_{-\varphi}(U)}$.

Insbesondere folgt aus (iii), (iv) bzw. (v), daß $SO(\mathbb{R}^2)$ abelsch ist, während $O(\mathbb{R}^2)$ nicht abelsch ist.

Bew.:

(i) Sei $L \in SO(\mathbb{R}^2)$, $L(e_1) =: (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt $x^2 + y^2 = 1$ und mit den Kenntnissen aus der Analysis I kann man einsehen, daß es genau ein $\varphi \in [0, 2\pi)$ gibt mit $(x, y) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, d.h. $L(e_1) = D_\varphi(e_1)$. Dann sind $L(e_2)$ und $D_\varphi(e_2)$ beides Einheitsvektoren, die zu $L(e_1) = D_\varphi(e_1)$ orthogonal sind und zusammen mit $L(e_1) = D_\varphi(e_1)$ eine positiv orientierte Basis bilden. Da es nur einen solchen Vektor gibt (das ist anschaulich klar, muß aber im Prinzip durch eine Rechnung begründet werden), gilt auch $L(e_2) = D_\varphi(e_2)$, also $L = D_\varphi$.
(ii) Sei $L \in O(2) \setminus SO(2)$. Um zu zeigen, daß L eine Spiegelung ist, suchen wir einen 1-dimensionalen Unterraum U, der punktweise von L festgelassen wird, d.h. einen Vektor $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit $L(v) = v$ ($\Leftrightarrow v$ EV zum EW 1 von L). Ist $\operatorname{Mat}(L) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, so gilt wegen $\det L = -1$: $\det(L - \lambda \operatorname{id}_{\mathbb{R}^2}) = \lambda^2 - (a + d)\lambda - 1 =: p(\lambda)$. Wegen $p(0) = -1$ und $\lim\limits_{\lambda \to \pm\infty} p(\lambda) = \infty$, hat $p(\lambda)$ zwei Nullstellen (d.h. L zwei Eigenwerte) $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$. Da L orthogonal ist, hat jeder Eigenwert von L den Betrag 1, also $\lambda_2 = -1, \lambda_1 = 1$. Sei v_1 EV von L zum EW $\lambda_1 = 1$ und (v_1, v_2) ONB von $\mathbb{R}^2$. Aus $L \in O(\mathbb{R}^2)$, $L \neq \operatorname{id}_{\mathbb{R}^2}$ und $L(v_1) = v_1$, folgt $L(v_2) = -v_2$, d.h. $L = S_U$ für $U := \operatorname{span}\{v_1\}$.

(iii) folgt aus den "Additionstheoremen" für sin und cos.

(iv) Es gelte $D_\varphi(U_1) = U_2$. Da $\det(S_{U_2} \circ S_{U_1}) = \det(S_{U_2}) \det(S_{U_1}) = (-1)^2 = 1$ ist, ist $S_{U_2} \circ S_{U_1} \in SO(\mathbb{R}^2)$, d.h. $S_{U_2} \circ S_{U_1}$ ist eine Drehung.

Wie in der Vorlesung mit einem einfachen elementargeometrischen Argument (und ähnlich für (v)) gezeigt wurde, ist $S_{U_2} \circ S_{U_1}$ in der Tat eine Drehung um den Winkel 2φ. Dieses Argument muß aber in der hier aufgebauten "Analytischen Geometrie" durch eine Rechnung bewiesen werden. Es ist nun so, daß solche Rechnungen statt mit (2×2)-Matrizen sehr viel weniger aufwendig mit komplexen Zahlen ausgeführt werden können. Deshalb zunächst der

Exkurs: Beschreibung von Drehungen und Spiegelungen des $\mathbb{R}^2$ mit Hilfe der komplexen Zahlen.

Identifizieren wir wie üblich $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x + iy \in \mathbb{C}$ und definieren (!) wir für $\varphi \in \mathbb{R}$

$$e^{i\varphi} := \cos\varphi + i \sin\varphi$$

(für diese Definition gibt es einen mathematischen Hintergrund, der uns jetzt nicht zu interessieren braucht), so berechnet man:

$$D_\varphi(z) = e^{i\varphi} \cdot z.$$

Die Additionstheoreme für sin und cos sind äquivalent zur Gleichung $e^{i(\varphi+\psi)} = e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi}$ für alle $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$. Außerdem gilt $\overline{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi}$ und $|e^{i\varphi}| = \sqrt{\cos^2 + \sin^2\varphi} = 1$. Ist $U = \operatorname{span}_\mathbb{R}\{e^{i\psi}\} := \{se^{i\psi} \mid s \in \mathbb{R}\}$, so zeigen wir, daß S_U durch

$$S_U(z) = e^{2i\psi}\overline{z}$$

gegeben ist: Die Abbildung $z \in \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 \to \overline{z} \in \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ ist gerade die Spiegelung an der x-Achse, so daß die Abbildung

$$z \to e^{2i\psi}\overline{z} = D_{2\psi}(\overline{z})$$

in $O(\mathbb{R}^2)\backslash SO(\mathbb{R}^2)$ liegt. Wendet man sie auf $z = e^{i\psi}$ an, so erhält man $e^{i\psi} \to e^{2i\psi} \cdot e^{-i\psi} = e^{i\psi}$. Da auch $S_U(e^{i\psi}) = e^{i\psi}$ gilt, folgt

$$S_U(z) = e^{2i\psi}\overline{z}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$, denn beide Abbildungen sind Spiegelungen, die die Gerade $\operatorname{span}_\mathbb{R}\{e^{2i\psi}\}$ fest lassen.

Wir kommen nun zu einem "analytischen" Beweis von (6.21)(iv) und (v):

(iv): Es sei $U_1 = \operatorname{span}_\mathbb{R}\{e^{i\psi_1}\} = D_{\psi_1}(\mathbb{R} \times \{0\})$ und $U_2 = \operatorname{span}_\mathbb{R}\{e^{i\psi_2}\} = D_{\psi_2}(\mathbb{R} \times \{0\})$.

Dann gilt $D_{\psi_2-\psi_1}(U_1) = D_{\psi_2-\psi_1}(D_{\psi_1}(\mathbb{R}\times\{0\}) \overset{\text{(iii)}}{=} D_{\psi_2}(\mathbb{R}\times\{0\}) = U_2$, d.h. für $\varphi := \psi_2 - \psi_1$ gilt $D_\varphi(U_1) = U_2$. Andererseits berechnen wir für alle $z \in \mathbb{C}$:

$$S_{U_2} \circ S_{U_1}(z) = S_{U_2}(e^{2i\psi_1}\overline{z}) = e^{2i\psi_2}\overline{(e^{2i\psi_1}\overline{z})} = e^{i2(\psi_2-\psi_1)}z = D_{2\varphi}(z)$$

(v): Ist $U = \operatorname{span}_\mathbb{R}\{e^{i\psi}\}$, so gilt

$$D_{2\varphi} \circ S_U(z) = e^{2i\varphi}e^{2i\psi}\overline{z} = e^{2i(\varphi+\psi)}\overline{z} = S_{D_\varphi(U)}(z),$$

da $D_\varphi(U) = \mathrm{span}_\mathbb{R}\{D_\varphi(e^{i\psi})\} = \mathrm{span}_\mathbb{R}\{e^{i(\varphi+\psi)}\}$.

Ebenso erhalten wir:

$$S_U \circ D_{2\varphi}(z) = e^{2i\psi}(e^{-2i\varphi}\overline{z}) = e^{2i(\psi-\varphi)}\overline{z} = S_{D_{-\varphi}(U)}(z).$$