**Normalform von orthogonalen Abbildungen**

(6.22) Def.: Sei $L \in \mathrm{End}(V)$. Ein Untervektorraum $U$ von $V$ heißt $L$-invariant, falls $L(U) \subseteq U$ gilt.

Bem.: $\{0\}$ und $V$ sind $L$-invariant für jedes $L \in \mathrm{End}(V)$.

Ein großes Ziel bei der Untersuchung eines $L \in \mathrm{End}(V)$ ist es, $L$-invariante Unterräume $U_1 \neq \{0\}, U_2 \neq \{0\}$ zu finden, so daß $V$ die direkte Summe von $U_1$ und $U_2$ ist, d.h. $V = U_1 \oplus U_2$. Dann reduziert sich die Untersuchung von $L$ auf die Untersuchung von $L|U_1 \in \mathrm{End}(U_1)$ und $L|U_2 \in \mathrm{End}(U_2)$. (Leider ist das nicht immer möglich, z.B. nicht für die "Scherung" $L \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ mit $\mathrm{Mat}(L) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.)

Man wird natürlich versuchen, solche $L$-invarianten Unterräume $U_1$ und $U_2$ in noch kleinere $L$-invariante Unterräume zu zerlegen, und dazu benötigen wir den Begriff der direkten Summe von endlich vielen Unterräumen (vgl. (3.19)–(3.21) und Blatt 3, Aufgabe 4): Sind $U_1, \ldots, U_k$ Unterräume eines Vektorraums $V$, so heißt $V$ die direkte Summe von $U_1, \ldots, U_k$ (geschrieben $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_k = \bigoplus_{i=1}^{k} U_i$), falls gilt:

(i) $V = \mathrm{span}(\bigcup_{i=1}^{k} U_i)$ und

(ii) Für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ gilt: $U_i \cap \mathrm{span}(\bigcup_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k} U_j) = \{0\}$.

Daraus folgt: Ist für $i = 1, \ldots, k$ $B_i$ eine Basis von $U_i$, so gilt $B_i \cap B_j = \emptyset$ für $i \neq j$, und $B := \bigcup_{i=1}^{k} B_i$ ist Basis von $V$. Ist $\dim V < \infty$, so folgt:

$$\dim V = \sum_{i=1}^{k} \dim U_i.$$

Im Fall eines euklidischen Vektorraums $(V, \langle , \rangle)$ ist folgender Spezialfall der direkten Summe wichtig:

(6.23) Def.: Seien $U_1, \ldots, U_k$ Unterräume von $V$ Dann heißt $V$ die orthogonale Summe von $U_1, \ldots, U_k$, falls gilt:

(i) $V = \mathrm{span}(\bigcup_{i=1}^{k} U_i)$ und

(ii) Für alle $1 \leq i \neq j \leq k$ gilt $U_i \subseteq U_j^{\perp}$.

Zur Bedingung (ii) sagt man, die $U_i$, $1 \leq i \leq k$, seien paarweise orthogonal.

Aus (6.23)(i) und (ii) folgt, daß $V$ die direkte Summe von $U_1, \ldots, U_k$ ist.

(6.24) Satz. *Sei $L \in O(V)$. Dann existieren $k \in \mathbb{N}$, 2-dimensionale, $L$-invariante Unterräume $U_1, \ldots, U_k$ von $V$ und $L$-invariante Unterräume $U_-$ und $U_+$ von $V$, so daß $V$ die orthogonale Summe von $U_1, \ldots, U_k$, $U_-$,$U_+$ ist und so daß gilt*

(i) $L|U_i \in SO(U_i) \setminus \{\pm \mathrm{id}_{U_i}\}$ *für* $1 \leq i \leq k$
(ii) $L|U_- = -(\mathrm{id}_{U_-})$
(iii) $L|U_+ = \mathrm{id}_{U_+}$

Bem.: 1) Es kann $k = 0$ oder $U_- = \{0\}$ oder $U_+ = \{0\}$ gelten.
2) Jedes $v \in V$ läßt sich dann eindeutig darstellen als

$$v = u_1 + \ldots + u_k + u_- + u_+$$

mit $u_i \in U_i$ für $1 \leq i \leq k$, $u_- \in U_-$ und $u_+ \in U_+$. Es gilt dann:

$$L(v) = L(u_1) + \ldots + L(u_k) - u_- + u_+.$$

$L$ setzt sich also aus $k$ "Drehungen" in den 2-dimensionalen Unterräumen $U_i$, $1 \leq i \leq k$, aus der "Punktspiegelung" $-(\mathrm{id}_{U_-})$ im Unterraum $U_-$ und der Identität auf $U_+$ zusammen.

3) Es gilt $2k + \dim U_- + \dim U_+ = n$. Ist $n$ ungerade, so folgt $\dim U_- + \dim U_+ \neq 0$.

4) $\det(L) = (-1)^{\dim U_-}$, vgl. Blatt 3, Aufgabe 3.

Umformuliert für Matrizen besagt (6.24):

(6.24)' Satz. *Sei $L \in O(V)$. Dann existieren eine ONB $\mathcal{G} = (v_1, \ldots, v_n)$ von $V$, $k \in \mathbb{N}$ und $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in (0, \pi)$, so daß gilt:*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{G}}(L) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}\cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1\end{matrix}} & & & & & & & & \\ & \boxed{\begin{matrix}\cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2\end{matrix}} & & & & 0 & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ 0 & & & \boxed{\begin{matrix}\cos\varphi_k & -\sin\varphi_k \\ \sin\varphi_k & \cos\varphi_k\end{matrix}} & & & & & \\ & & & & -1 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & -1 & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Äquivalent dazu ist: *Zu jedem $A \in O(n)$ existiert ein $B \in O(n)$, so daß $B^T AB$ die obige Form hat.*

(6.25) Lemma. Sei $L \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$. Dann existiert ein $L$-invarianter Untervektorraum $U$ des $\mathbb{R}^n$ mit $0 < \dim U \leq 2$.

Bew.: Das wurde im 1. Schritt des Beweis von Satz (6.11) (Hauptachsentransformation) wie folgt gezeigt: Wir betrachten die $\mathbb{C}$-lineare Fortsetzung $\tilde{L}$ von $L$ auf $\mathbb{C}^n$ und erhalten einen EW $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ mit $\alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$ und einen zugehörigen EV $v = x + iy \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ mit $x,\, y \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$$(*) \qquad L(x) = \alpha x - \beta y \text{ und } L(y) = \beta x + \alpha y.$$

Das zeigt, daß $\operatorname{span}\{x, y\}$ $L$-invariant ist. Wegen $v = x + iy \neq 0$ gilt $\operatorname{span}\{x, y\} \neq \{0\}$.

Beweis von (6.24): Durch vollständige Induktion nach $n = \dim V$.

Induktionsanfang: Ist $\dim V = 1$, so gilt $O(V) = \{\pm \mathrm{id}_V\}$. Die Behauptung ist richtig mit $k = 0$ und entweder $U_+ = V$ oder $U_- = V$.

Induktionsschritt: Sei $L \in O(V)$ und $\dim V = n > 1$. Wegen (6.9) genügt es, den Fall zu betrachten, daß $(V, \langle , \rangle)$ der $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt ist. Aus Lemma (6.25) folgt, daß ein $L$-invarianter Unterraum $U \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert mit $0 < \dim U \leq 2$.

(i) Gilt $n = 2$ und $U = \mathbb{R}^n$, so folgt die Behauptung aus (6.21):
Entweder $L$ ist eine Spiegelung ( $\rightarrow \operatorname{Mat}^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}(L) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ für eine geeignete ONB des $\mathbb{R}^2$), oder $L = D_\varphi$ für ein $\varphi \in [0, 2\pi)$.
Ist $\varphi = 0$, so $L = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ ($\Rightarrow k = 0$, $U_- = \{0\}$, $U_+ = \mathbb{R}^2$).
Ist $\varphi = \pi$, so $L = -\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ ($\Rightarrow k = 0$, $U_- = \mathbb{R}^2$, $U_+ = \{0\}$). Sonst gilt $D_\varphi \in SO(\mathbb{R}^2) \setminus \{\pm \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}\}$.

(ii) Gilt $U \subsetneqq \mathbb{R}^n$, so folgt aus (6.15)

$$\mathbb{R}^n = U \oplus U^\perp$$

Da $U$ $L$-invariant ist und $L$ orthogonal ist, ist auch $U^\perp$ $L$-invariant (vgl. Blatt 1, Aufgabe 1). Wegen $\dim U^\perp = n - \dim U < n$ ist auf $L|U^\perp$ die Induktionsvoraussetzung anwendbar. Daraus folgt zusammen mit unseren Kenntnissen über $O(\mathbb{R})$ und $O(\mathbb{R}^2)$ die Behauptung.

Die einzige zusätzliche Information, die man zum Beweis von (6.24)' benötigt, ist folgende: Ist $\dim V = 2$ und $L \in SO(V) \setminus \{\pm \mathrm{id}_V\}$, so existiert eine ONB $\mathcal{G}$ von $V$ und $\varphi \in (0, \pi)$, so daß $\operatorname{Mat}^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}(L) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ gilt. Das sieht man so ein. Ist $\tilde{\mathcal{G}} = (v_1, v_2)$ irgendeine ONB von $V$, so existiert $\tilde{\varphi} \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ mit

$$\operatorname{Mat}^{\tilde{\mathcal{G}}}_{\tilde{\mathcal{G}}}(L) = \begin{pmatrix} \cos\tilde{\varphi} & -\sin\tilde{\varphi} \\ \sin\tilde{\varphi} & \cos\tilde{\varphi}. \end{pmatrix}$$

Ist $\tilde{\varphi} \in (\pi, 2\pi)$, so betrachten wir $\mathcal{G} = (v_1, -v_2)$ und erhalten

$$\operatorname{Mat}^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}(L) = \begin{pmatrix} \cos\tilde{\varphi} & \sin\tilde{\varphi} \\ -\sin\tilde{\varphi} & \cos\tilde{\varphi}. \end{pmatrix}$$

Wegen $\cos(-\tilde{\varphi}) = \cos\tilde{\varphi}$, $\sin(-\tilde{\varphi}) = -\sin\tilde{\varphi}$ folgt mit $\varphi := 2\pi - \tilde{\varphi} \in (0, \pi)$:

$$\operatorname{Mat}^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}(L) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi, \end{pmatrix}$$

wie behauptet.

Die anschauliche Begründung für die letzte Überlegung ist wie folgt: Ist $\dim V = 2$ und $L \in SO(V)$, so ist der "Drehwinkel" $\tilde{\varphi}$ von $L$ erst nach Wahl einer Orientierung ($\Rightarrow$ eines "positiven Drehsinns") für $V$ definiert. Ändert man die Orientierung, so geht $\tilde{\varphi}$ in $-\tilde{\varphi}$ über. Ist $\tilde{\varphi} \in (\pi, 2\pi)$, so ist $-\tilde{\varphi} \in (-2\pi, -\pi)$ und statt $-\tilde{\varphi}$ kann man natürlich auch $\varphi := 2\pi - \tilde{\varphi} \in (0, \pi)$ nehmen.

Oft ist es wichtig zu wissen, ob die Unterräume in (6.24) und ob die Normalform in (6.24)' und die zugehörige ONB eindeutig durch $L$ bestimmt sind.

Hierzu kann man folgendes sagen:
Es gilt $U_+ = \ker(L - \mathrm{id}_V)$, $U_- = \ker(L + \mathrm{id}_V)$, so daß $U_-, U_+$ und damit auch $k = \frac{1}{2}(n - (\dim U_- + \dim U_+))$ eindeutig durch $L$ bestimmt sind. Die $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in (0, \pi)$ sind (bis auf ihre Reihenfolge) eindeutig durch $L$ bestimmt (und damit auch die Normalform in (6.24)'), da $e^{i\varphi_1}, e^{-i\varphi_1}, \ldots e^{i\varphi_k}, e^{-i\varphi_k}$ gerade die Eigenwerte $\neq \pm 1$ von $\tilde{L}$ sind. Aus (6.24)' folgt nämlich sofort:

$$\det(L - \lambda\,\mathrm{id}) = \prod_{j=1}^{k} \underbrace{(\lambda^2 - 2(\cos\varphi_j)\lambda + 1)}_{(\lambda - e^{i\varphi_j})(\lambda - e^{-i\varphi_j})} \cdot (1 + \lambda)^{\dim U_-} \cdot (1 - \lambda)^{\dim U_+}$$

Eine ONB, in der die Matrix von $L$ die Normalform (6.24)' annimmt, ist nicht eindeutig durch $L$ bestimmt. Z.B. ist die Matrix einer Drehung, $D_\varphi \in SO(\mathbb{R}^2)$, $\varphi \in (0, \pi)$, bezüglich jeder positiv orientierten ONB des $\mathbb{R}^2$ in der Normalform $\begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{pmatrix}$.

Nach so vielen Worten möchte man hoffen, nun alles über orthogonale Abbildungen zu wissen. Weit gefehlt! Über die Gruppenstruktur von $SO(n)$ für $n \geq 3$ wurde etwa noch nichts gesagt. Man möchte auch gern die Elemente von $SO(3)$ durch 3 (warum gerade 3?) reelle "Parameter" beschreiben (so wie wir die Elemente von $SO(2)$ durch den Drehwinkel $\varphi \mod 2\pi$ beschrieben haben). Aber geht das und wie am besten? Da gibt es Fragen und Antworten, genug für ein ganzes Mathematikstudium...