Orthogonales Komplement und Orthogonalprojektion

Wir betrachten weiterhin einen euklidischen Vektorraum $V, \langle , \rangle$.

(6.13) Def.: Ist $M \subseteq V$, so heißt

$$M^\perp := \{v \in V \mid \forall w \in M : \langle v, w\rangle = 0\}$$

das orthogonale Komplement von M.

(6.14) Fakt.

(i) $M^\perp$ ist Untervektorraum von V.
(ii) $M_1 \subseteq M_2 \subseteq V \Rightarrow M_2^\perp \subseteq M_1^\perp$
(iii) $M^\perp = (\mathrm{span}(M))^\perp$
(iv) $M \subseteq (M^\perp)^\perp$

Bew. von (iii): Wegen (ii) genügt es, $M^\perp \subseteq (\mathrm{span}(M))^\perp$ zu beweisen. Sei also $v \in M^\perp$. Wir müssen zeigen, daß für alle $w \in \mathrm{span}(M)$ gilt: $\langle v, w\rangle = 0$. Zu jedem $w \in \mathrm{span}(M)$ existieren $k \in \mathbb{N}$, $r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{R}$ und $w_1, \ldots, w_k \in M$:

$$w = \sum_{i=1}^{k} r_i w_i \qquad \text{(siehe (3.7))}.$$

Wegen $v \in M^\perp$ und $w_i \in M$ gilt $\langle v, w_i\rangle = 0$ für $1 \leq i \leq k$. Also:

$$\langle v, w\rangle = \langle v, \sum_{i=1}^{k} r_i w_i\rangle = \sum_{i=1}^{k} r_i \langle v, w_i\rangle = 0.$$

Bsp.: $V = \mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt

$$\begin{aligned} M = \{e_1, e_2\} \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{span}(M) = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \\ M^\perp = (\mathrm{span}(M))^\perp \quad &= \quad \{(0,0)\} \times \mathbb{R} \end{aligned}$$

(6.15) Satz. *Sei* $\dim V < \infty$. *Dann gilt für jeden Untervektorraum* U *von* V*:*

$$U \oplus U^\perp = V \quad \textit{und} \quad (U^\perp)^\perp = U.$$

Speziell: $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$.

Bew.: Sei $\dim U =: k$. Ergänze eine Basis $(v_1, \ldots, v_k)$ von U zu einer Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von V, vgl. (3.16). Nach (6.7) (Gram-Schmidt) existiert eine ONB $(w_1, \ldots, w_n)$ von V, so daß

$$\mathrm{span}\{w_1, \ldots, w_k\} = \mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_k\} = U$$

gilt. Wir zeigen, daß $U^\perp = \mathrm{span}\{w_{k+1}, \ldots, w_n\}$ gilt. Denn:

(i) Ist $i \leq k < j$, so gilt $\langle w_i, w_j\rangle = 0$, also $w_j \in \{w_1, \ldots, w_k\}^\perp = U^\perp$. Wegen (6.14)(i) folgt $\mathrm{span}\{w_{k+1}, \ldots, w_n\} \subseteq U^\perp$.

(ii) Ist $v = \sum_{j=1}^{n} r_j w_j \in U^\perp$, so gilt für $1 \le i \le k$:

$$0 = \langle v, w_i \rangle = \sum_{j=1}^{n} r_j \langle w_j, w_i \rangle = r_i.$$

Also $v = \sum_{j=k+1}^{n} r_j w_j \in \operatorname{span}\{w_{k+1}, \ldots, w_n\}^\perp$.

Aus $U = \operatorname{span}\{w_1, \ldots, w_k\}$ und $U^\perp = \operatorname{span}\{w_{k+1}, \ldots, w_n\}$ folgt $V = U \oplus U^\perp$ und $(U^\perp)^\perp = U$.

Bem.: 1) Der Beweis von (6.15) liefert ein Rechenverfahren zur Bestimmung einer ONB $\{w_1, \ldots, w_n\}$ von V, so daß $\{w_1, \ldots, w_k\}$ eine ONB von U und $\{w_{k+1}, \ldots, w_n\}$ eine ONB von $U^\perp$ ist.
2) (6.15) gilt nicht ohne die Voraussetzung $\dim V < \infty$!

Ist U Untervektorraum eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraums V, so ist $U^\perp$ ein zu U komplementärer Vektorraum, vgl. (3.21). Unter den vielen zu U komplementären Untervektorräumen ist $U^\perp$ durch die Eigenschaft ausgezeichnet, daß jedes $v \in U^\perp$ zu allen $u \in U$ orthogonal ist (d.h. der Name “orthogonales Komplement”). Ist $\dim V = \infty$, so kann $U \oplus U^\perp \subsetneqq V$ gelten. In diesem Fall ist das orthogonale Komplement $U^\perp$ also <u>kein</u> zu U komplementärer Unterraum. (Ein “orthogonales Komplement” ist also nicht notwendig ein “Komplement”. So etwas tritt in der mathematischen Sprache öfters auf, wie auch in der Umgangssprache, in der mit einem “tollen Hecht” oft kein Hecht gemeint ist.)

(6.16) Def.: Sei U Untervektorraum von V und $V = U \oplus U^\perp$. Dann existiert für jedes $v \in V$ genau ein Paar $(u_0, u_1) \in U \times U^\perp$, so daß $v = u_0 + u_1$ gilt. Die Abbildung $P_U : V \to U$, $P_U(v) := u_0$, heißt <u>Orthogonalprojektion von</u> V <u>auf</u> U.

Bem.:

0) $P_U(v)$ ist durch die Eigenschaften $P_U(v) \in U$ und $v - P_U(v) \in U^\perp$ eindeutig bestimmt.
1) $P_U \in \operatorname{Hom}(V, U)$.
2) Für alle $u \in U$ gilt $P_U(u) = u$ (d.h. $P_U|U = \mathrm{id}_U$) und für alle $v \in U^\perp$ gilt $P_U(v) = 0$.
3) Ist $(v_1, \ldots, v_k)$ ONB von U, so gilt für alle $v \in V$:

$$P_U(v) = \sum_{i=1}^{k} \langle v, v_i \rangle v_i.$$

4) Ist $(v_{k+1}, \ldots, v_n)$ ONB von $U^\perp$, so gilt für alle $v \in V$:

$$P_U(v) = v - \sum_{i=k+1}^{n} \langle v, v_i \rangle v_i.$$

Bez.: Ist $\emptyset \neq M \subseteq V$ und $v \in V$, so heißt

$$d(v, M) := \inf\{\|v-u\| \mid u \in M\}$$

der Abstand von v zu M.

(6.17) Satz. *Sei $U \subseteq V$ Untervektorraum und $V = U \oplus U^\perp$. Dann gilt für jedes $v \in V$: Es existiert genau ein $\overline{u} \in U$ mit $d(v, U) = \|v - \overline{u}\|$, nämlich $\overline{u} = P_U(v)$.*
Speziell gilt: $d(v, U) = \|v - P_U(v)\|$.

Bew.: Sei $u \in U$ beliebig. Zerlege $v = P_U(v) + (v - P_U(v))$, wobei $P_U(v) \in U$, $(v - P_U(v)) \in U^\perp$. Dann gilt

$$\|v-u\|^2 = \|(P_U(v) - u) + (v - P_U(v))\|^2 = \|(P_U(v)-u)\|^2 + \|v - P_U(v)\|^2.$$

Also $\|v-u\| \geq \|v - P_U(v)\|$, wobei Gleichheit genau für $u = P_U(v)$ eintritt.

Bsp.: Approximation komplizierter Funktionen durch einfache: die Fourierentwicklung. Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum

$$V = C^0([0, 2\pi], \mathbb{R}) = \{f \mid f : [0, 2\pi] \to \text{stetig}\}$$

mit dem sogenannten L^2-Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle := \int_0^{2\pi} f(x) g(x) dx$$

und dem ONS $f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $f_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kx)$, $g_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(kx)$, vgl. Bsp. 1 nach (6.1) und Bsp. nach (6.5). Es sei

$$U_n := \operatorname{span}\{f_0, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n\}.$$

Wegen Bem. 3 nach (6.16) gilt für alle $f \in V$:

$$(*) \qquad P_{U_n}(f) = \sum_{k=0}^{n} \langle f, f_k\rangle f_k + \sum_{k=1}^{n} \langle f, g_k\rangle g_k.$$

Im Gegensatz zu dem nach (6.6) geschriebenen, definiert man üblicherweise die Fourierkoeffizienten $a_k = a_k(f)$ und $b_k = b_k(f)$ durch

$$\begin{aligned} a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx) dx &= \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\langle f, f_0\rangle & \text{für } k = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\langle f, f_k\rangle & \text{für } k > 0 \end{cases} \\ b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx) dx &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\langle f, g_k\rangle \text{ für } k > 0. \end{aligned}$$

Damit schreibt sich $(*)$ als

$$P_{U_n}(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right).$$

Satz (6.17) besagt, daß $P_{U_n}(f)$ das eindeutig bestimmte Element von U_n mit minimalem L^2-Abstand von f ist, d.h. die beste (L^2-)Approximation von f durch ein Element von U_n. Die (hier nicht bewiesene) Tatsache, daß $\{f_0\} \cup \{f_k, g_k \mid k > 0\}$ ein vollständiges ONS bilden, heißt gerade, daß für jedes $f \in V$ gilt

$$\left(\lim_{n\to\infty} d(f, U_n) =\right) \lim_{n\to\infty} \|f - P_{U_n}(f)\| = 0.$$

Die Gramsche Determinante (J.P. Gram, dän. Math. 1850-1916)

(6.18) Satz. *Sei V euklidischer Vektorraum, $0 < \dim V = n < \infty$. Dann existieren genau zwei Determinantenformen $\pm D$ auf V, so daß gilt:*

$$\textit{Ist } v_1, \ldots, v_n \text{ ONB } \textit{ von } V, \textit{so gilt } |\pm D(v_1, \ldots, v_n)| = 1.$$

Bez.: Ein solches D heiße <u>normierte</u> Determinantenform des euklidischen Vektorraums V.

Bew.: Existenz: Sei $(\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n)$ eine (feste) ONB vn V. Nach (5.10) existiert genau eine Determinantenform D von V mit

$$D(\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n) = 1.$$

Wir müssen zeigen, daß dann für jede ONB $(v_1, \ldots, v_n)$ von V $|D(v_1, \ldots, v_n)| = 1$ gilt. Sei $L \in \operatorname{End} V$ durch $L(\overline{v}_i) = v_i$ für $1 \leq i \leq n$ definiert. Nach Definition (5.19) gilt:

$$D(v_1, \ldots, v_n) = \det L \;\; D(\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n) = \det L.$$

Nach (6.10) gilt für die Matrix A von L bzgl. $(v_1, \ldots, v_n)$:

$$A^T A = E_n.$$

Also $1 = \det E_n = \det(A^T A) \overset{(5.20)}{=} \det A^T \det A \overset{(5.17)}{=} (\det A)^2 \overset{(5.21)}{=} (\det L)^2$ und damit

$$|D(v_1, \ldots, v_n| = |\det L| = 1.$$

Daß $\pm D$ die einzigen solchen Determinantenformen sind, folgt direkt aus (5.10).

Aus Satz (6.18) folgt, daß in endlich-dimensionalen euklidischen Vektorräumen $(V, \langle,\rangle)$ ein natürlicher Volumenbegriff für Parallelotope existiert. Ist D eine normierte Determinantenform und sind $w_1, \ldots, w_n \in V$, so definieren wir

$$\operatorname{vol}_n^{\langle,\rangle}(P(w_1, \ldots, w_n)) := |D(w_1, \ldots, w_n)|.$$

Ist $(v_1, \ldots, v_n)$ eine ONB von V, so nennt man $P(v_1, \ldots, v_n)$ einen Würfel der Kantenlänge 1, und es folgt:

$$\operatorname{vol}_n^{\langle,\rangle}(P(v_1, \ldots, v_n)) = 1.$$

Die Gramsche Determinante berechnet $\operatorname{vol}_n^{\langle,\rangle}(P(w_1, \ldots, w_n))$ mittels der Skalarprodukte $\langle w_i, w_k\rangle$ für $1 \leq i, k \leq n$:

(6.19) Satz (Gramsche Determinante). *Sei $(V, \langle , \rangle)$ n-dimensionaler euklidischer Vektorraum und $w_1, \dots, w_n \in V$. Dann gilt*

$$\mathrm{vol}_n^{\langle , \rangle}(P(w_1, \dots, w_n)) = \sqrt{\det((\langle w_i, w_k\rangle)_{1 \leq i,k \leq n})}.$$

Bsp.: Wir betrachten $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt. Dann ist D_0 eine normierte Determinantenform, da $D_0(e_1, e_2) = 1$. In diesem Fall sagt (6.19):

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_2^{\langle , \rangle}(P(w_1, w_2)) &= \sqrt{\det \begin{pmatrix} \langle w_1, w_1\rangle & \langle w_1, w_2\rangle \\ \langle w_2, w_1\rangle & \langle w_2, w_2\rangle \end{pmatrix}} = \sqrt{\|w_1\|^2\|w_2\|^2 - \langle w_1, w_2\rangle^2} \\ &= \|w_1\|\|w_2\|\sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \|w_1\|\|w_2\| \sin\varphi, \end{aligned}$$

wobei φ den Winkel zwischen w_1 und w_2 bezeichnet. Das ist die Formel für die Fläche des Parallelogramms $P(w_1, w_2)$ mit den Seitenlängen $\|w_1\|$ und $\|w_2\|$ und dem eingeschlossenen Winkel φ.

Beweis von (6.19): Sei $\mathcal{G} = (v_1, \dots, v_n)$ eine ONB von V und $L \in \mathrm{End}(V)$ durch $L(v_j) = w_j$ für $1 \leq j \leq n$ definiert. Dann ist $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{G}}(L)$ durch

$$w_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i$$

definiert, und es gilt mit einer normierten Determinantenform D:

$$(*) \qquad \mathrm{vol}_n^{\langle , \rangle}(P(w_1, \dots, w_n)) = |D(w_1, \dots, w_n)| = |\det A||D(v_1, \dots, v_n)| = |\det A|.$$

Andererseits:

$$\begin{aligned} \langle w_i, w_k\rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^n a_{ji} v_j, \sum_{l=1}^n a_{lk} v_l \right\rangle = \sum_{j,l=1}^n a_{ji} a_{lk} \underbrace{\langle v_j, v_l\rangle}_{=\delta_{jl}} = \sum_{j=1}^n a_{ji} a_{jk} \\ &= (A^T \cdot A)_{ik} \end{aligned}$$

Also: $(\langle w_i, w_k\rangle)_{1 \leq i,k \leq n} = A^T A$.

Daraus folgt: $(**)$ $\det(\langle w_i, w_k\rangle)_{1 \leq i,k \leq n} = \det(A^T A) = (\det A)^2$.

Aus $(*)$ und $(**)$ folgt die Behauptung.

Jeder Unterraum U eines euklidischen Vektorraums $(V, \langle , \rangle)$ "erbt" das Skalarprodukt von V, d.h. $\langle , \rangle \mid U \times U$ ist ein Skalarprodukt auf U. Damit ist auch das Volumen von k $(\leq n)$-dimensionalen Parallelotopen in V definiert:

Sind $v_1, \dots, v_k \in V$ linear unabhängig, so heißt

$$P(v_1, \dots, v_k) = \left\{ \sum_{i=1}^k s_i v_i \mid 0 \leq s_i \leq 1 \right\} \subseteq \mathrm{span}\{v_1, \dots, v_k\}$$

das von $v_1, \dots, v_k$ aufgespannte (k-dimensionale) Parallelotop.

Ist D^U normierte Determinantenform auf $U := \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_k\}$, so besagt (6.19)

$$|D^U(v_1, \ldots, v_k)| = \sqrt{\det((\langle v_i, v_j\rangle)_{1\le i,j\le k})}$$

und wir definieren diesen Wert als das k-dimensionale Volumen $\operatorname{vol}_k^{\langle,\rangle}(P(v_1, \ldots, v_k))$ von $P(v_1, \ldots, v_k)$. Sind $v_1, \ldots, v_k$ linear abhängig, so definieren wir $\operatorname{vol}_k^{\langle,\rangle}(P(v_1, \ldots, v_k)) = 0$.

Orthogonale Abbildungen

Wir wollen orthogonale Endomorphismen $L \in O(V)$ eines euklidischen Vektorraums $(V, \langle,\rangle)$ untersuchen.

Erinnerung (an Def. (6.8)):

$$L \in O(V) \Leftrightarrow L \in \operatorname{End}(V) \text{ und für alle } v, w \in V \text{ gilt } \langle L(v), L(w)\rangle = \langle v, w\rangle.$$

Solche $L \in O(V)$ sind stets injektiv und damit – falls $\dim V < \infty$ – auch surjektiv. Wir setzen voraus, daß $\dim V = n < \infty$ gilt. Dann ist $O(V)$ eine Untergruppe von $\operatorname{Aut}(V)$ (mit der Hintereinanderausführung von Abbildungen als Gruppenoperation). Nach Satz (6.10) gilt: Ist $\mathcal{G} = (v_1, \ldots, v_n)$ ONB von V, ist $L \in \operatorname{End}(V)$ und $A := \operatorname{Mat}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{G}}(L)$, so gilt:

$$L \in O(V) \Leftrightarrow A^T \cdot A = E_n.$$

Speziell folgt daraus (wie im Beweis von (6.18) schon benutzt):

$$L \in O(V) \Rightarrow |\det L| = |\det A| = 1.$$

(6.20) Def.: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt orthogonal $\Leftrightarrow A^T A = E_n$
$O(n) := \{A \mid A \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ orthogonal}\}$
$SO(n) := \{A \mid A \in O(n),\ \det A = 1\} = O(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$
$SO(V) := \{L \mid L \in O(V),\ \det L = 1\}$

Da $\operatorname{Mat}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{G}} : (\operatorname{Aut}(V), \circ) \to (\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot)$ ein Gruppenisomorphismus ist (vgl. (4.18)), ist $O(n) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{G}}(O(V))$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Ebenso ist $SO(n)$ (bzw. $SO(V)$) Untergruppe von $O(n)$ (bzw. von $O(V)$).

Wir beschäftigen uns zunächst mit dem Spezialfall $V = \mathbb{R}^2$, $\langle,\rangle =$ Standardskalarprodukt, d.h.

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2)\rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

Beispiele von Elementen in $O(\mathbb{R}^2)$:

1) "Drehungen": Sei $\varphi \in \mathbb{R}$ und $D_\varphi \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^2)$ mit

$$\operatorname{Mat}(D_\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Dann gilt

$$\operatorname{Mat}(D_\varphi)^T \cdot \operatorname{Mat}(D_\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\varphi + \sin^2\varphi & 0 \\ 0 & \cos^2\varphi + \sin^2\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

d.h. $\mathrm{Mat}(D_\varphi) \in O(2)$ und damit $D_\varphi \in O(\mathbb{R}^2)$. Wegen

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = 1 \text{ gilt sogar } D_\varphi \in SO(\mathbb{R}^2), \mathrm{Mat}(D_\varphi) \in SO(2).$$

Offenbar gilt $D_{\varphi+2\pi} = D_\varphi$ und $D_\varphi \neq D_\psi$, falls $0 \leq \varphi < \psi < 2\pi$.

2) "Spiegelungen an Geraden durch $0 \in \mathbb{R}^2$": Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ 1-dimensionaler Untervektorraum. Wähle eine ONB $\mathcal{G} = (v_1, v_2)$ des $\mathbb{R}^2$ mit $\mathrm{span}\{v_1\} = U$. Definiere "die Spiegelung $S_U \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ an U" durch

$$S_U(v_1) = v_1, S_U(v_2) = -v_2.$$

Dann gilt $S_U \in O(\mathbb{R}^2) \setminus SO(\mathbb{R}^2)$, da $\mathrm{Mat}^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}(S_U) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in O(2) \setminus SO(2)$.

S_U ist durch U eindeutig bestimmt!

(6.21) Fakt. Es gilt:

(i) $SO(\mathbb{R}^2) = \{D_\varphi | \varphi \in [0, 2\pi)\}$.

(ii) $O(\mathbb{R}^2) = \{S_U | U$ 1-dimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^2\}$.

(iii) $\forall \varphi, \psi \in \mathbb{R} : D_{\varphi+\psi} = D_\varphi \circ D_\psi (= D_\psi \circ D_\varphi), D_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ (d.h. $\varphi \in (\mathbb{R}, +) \to D_\varphi \in (SO(\mathbb{R}^2), \circ)$ ist surjektiver Gruppenhomomorphismus).

$$D_\varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \varphi \in \{2\pi k | k \in \mathbb{Z}\}$$

(iv) $S_{U_2} \circ S_{U_1} = D_{2\varphi}$, wobei φ der Winkel ist, um den man U_1 drehen muß, um U_2 zu erhalten, d.h. $D_\varphi(U_1) = U_2$. (φ ist bis auf additive Vielfache $\varphi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, von π bestimmt.)

(v) $D_{2\varphi} \circ S_U = S_{D_\varphi(U)}, S_U \circ D_{2\varphi} = S_{D_{-\varphi}(U)}$.

Insbesondere folgt aus (iii), (iv) bzw. (v), daß $SO(\mathbb{R}^2)$ abelsch ist, während $O(\mathbb{R}^2)$ nicht abelsch ist.

Bew.:

(i) Sei $L \in SO(\mathbb{R}^2)$, $L(e_1) =: (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt $x^2 + y^2 = 1$ und mit den Kenntnissen aus der Analysis I kann man einsehen, daß es genau ein $\varphi \in [0, 2\pi)$ gibt mit $(x, y) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, d.h. $L(e_1) = D_\varphi(e_1)$. Dann sind $L(e_2)$ und $D_\varphi(e_2)$ beides Einheitsvektoren, die zu $L(e_1) = D_\varphi(e_1)$ orthogonal sind und zusammen mit $L(e_1) = D_\varphi(e_1)$ eine positiv orientierte Basis bilden. Da es nur einen solchen Vektor gibt (das ist anschaulich klar, muß aber im Prinzip durch eine Rechnung begründet werden), gilt auch $L(e_2) = D_\varphi(e_2)$, also $L = D_\varphi$.

(ii) Sei $L \in O(2) \setminus SO(2)$. Um zu zeigen, daß L eine Spiegelung ist, suchen wir einen 1-dimensionalen Unterraum U, der punktweise von L festgelassen wird, d.h. einen Vektor $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit $L(v) = v$ ($\Leftrightarrow v$ EV zum EW 1 von L). Ist $\mathrm{Mat}(L) =$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, so gilt wegen $\det L = -1$: $\det(L - \lambda\, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) = \lambda^2 - (a+d)\lambda - 1 =: p(\lambda)$. Wegen $p(0) = -1$ und $\lim\limits_{\lambda \to \pm\infty} p(\lambda) = \infty$, hat $p(\lambda)$ zwei Nullstellen (d.h. L zwei Eigenwerte) $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$. Da L orthogonal ist, hat jeder Eigenwert von L den Betrag 1, also $\lambda_2 = -1, \lambda_1 = 1$. Sei v_1 EV von L zum EW $\lambda_1 = 1$ und (v_1, v_2) ONB von $\mathbb{R}^2$. Aus $L \in O(\mathbb{R}^2)$, $L \neq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ und $L(v_1) = v_1$, folgt $L(v_2) = -v_2$, d.h. $L = S_U$ für $U := \mathrm{span}\{v_1\}$.

(iii) folgt aus den "Additionstheoremen" für sin und cos.

(iv) Es gelte $D_\varphi(U_1) = U_2$. Da $\det(S_{U_2} \circ S_{U_1}) = \det(S_{U_2}) \det(S_{U_1}) = (-1)^2 = 1$ ist, ist $S_{U_2} \circ S_{U_1} \in SO(\mathbb{R}^2)$, d.h. $S_{U_2} \circ S_{U_1}$ ist eine Drehung.

Wie in der Vorlesung mit einem einfachen elementargeometrischen Argument (und ähnlich für (v)) gezeigt wurde, ist $S_{U_2} \circ S_{U_1}$ in der Tat eine Drehung um den Winkel 2φ. Dieses Argument muß aber in der hier aufgebauten "Analytischen Geometrie" durch eine Rechnung bewiesen werden. Es ist nun so, daß solche Rechnungen statt mit (2×2)-Matrizen sehr viel weniger aufwendig mit komplexen Zahlen ausgeführt werden können. Deshalb zunächst der

Exkurs: Beschreibung von Drehungen und Spiegelungen des $\mathbb{R}^2$ mit Hilfe der komplexen Zahlen.

Identifizieren wir wie üblich $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x + iy \in \mathbb{C}$ und definieren (!) wir für $\varphi \in \mathbb{R}$

$$e^{i\varphi} := \cos\varphi + i \sin\varphi$$

(für diese Definition gibt es einen mathematischen Hintergrund, der uns jetzt nicht zu interessieren braucht), so berechnet man:

$$D_\varphi(z) = e^{i\varphi} \cdot z.$$

Die Additionstheoreme für sin und cos sind äquivalent zur Gleichung $e^{i(\varphi+\psi)} = e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi}$ für alle $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$. Außerdem gilt $\overline{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi}$ und $|e^{i\varphi}| = \sqrt{\cos^2 + \sin^2\varphi} = 1$. Ist $U = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{e^{i\psi}\} := \{s e^{i\psi} \mid s \in \mathbb{R}\}$, so zeigen wir, daß S_U durch

$$S_U(z) = e^{2i\psi}\overline{z}$$

gegeben ist: Die Abbildung $z \in \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 \to \overline{z} \in \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ ist gerade die Spiegelung an der x-Achse, so daß die Abbildung

$$z \to e^{2i\psi}\overline{z} = D_{2\psi}(\overline{z})$$

in $O(\mathbb{R}^2) \backslash SO(\mathbb{R}^2)$ liegt. Wendet man sie auf $z = e^{i\psi}$ an, so erhält man $e^{i\psi} \to e^{2i\psi} \cdot e^{-i\psi} = e^{i\psi}$. Da auch $S_U(e^{i\psi}) = e^{i\psi}$ gilt, folgt

$$S_U(z) = e^{2i\psi}\overline{z}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$, denn beide Abbildungen sind Spiegelungen, die die Gerade $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{e^{2i\psi}\}$ fest lassen.

Wir kommen nun zu einem "analytischen" Beweis von (6.21)(iv) und (v):

(iv): Es sei $U_1 = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{e^{i\psi_1}\} = D_{\psi_1}(\mathbb{R} \times \{0\})$ und $U_2 = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{e^{i\psi_2}\} = D_{\psi_2}(\mathbb{R} \times \{0\})$.

Dann gilt $D_{\psi_2-\psi_1}(U_1) = D_{\psi_2-\psi_1}(D_{\psi_1}(\mathbb{R}\times\{0\}) \stackrel{\text{(iii)}}{=} D_{\psi_2}(\mathbb{R}\times\{0\}) = U_2$, d.h. für $\varphi := \psi_2-\psi_1$ gilt $D_\varphi(U_1) = U_2$. Andererseits berechnen wir für alle $z \in \mathbb{C}$:

$$S_{U_2} \circ S_{U_1}(z) = S_{U_2}(e^{2i\psi_1}\overline{z}) = e^{2i\psi_2}\overline{(e^{2i\psi_1}\overline{z})} = e^{i2(\psi_2-\psi_1)}z = D_{2\varphi}(z)$$

(v): Ist $U = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{e^{i\psi}\}$, so gilt

$$D_{2\varphi} \circ S_U(z) = e^{2i\varphi}e^{2i\psi}\overline{z} = e^{2i(\varphi+\psi)}\overline{z} = S_{D_\varphi(U)}(z),$$

da $D_\varphi(U) = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{D_\varphi(e^{i\psi})\} = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{e^{i(\varphi+\psi)}\}$.

Ebenso erhalten wir:

$$S_U \circ D_{2\varphi}(z) = e^{2i\psi}(e^{-2i\varphi}\overline{z}) = e^{2i(\psi-\varphi)}\overline{z} = S_{D_{-\varphi}(U)}(z).$$

Normalform von orthogonalen Abbildungen

(6.22) Def.: Sei $L \in \operatorname{End}(V)$. Ein Untervektorraum U von V heißt L-invariant, falls $L(U) \subseteq U$ gilt.

Bem.: $\{0\}$ und V sind L-invariant für jedes $L \in \operatorname{End}(V)$.

Ein großes Ziel bei der Untersuchung eines $L \in \operatorname{End}(V)$ ist es, L-invariante Unterräume $U_1 \neq \{0\}, U_2 \neq \{0\}$ zu finden, so daß V die direkte Summe von U_1 und U_2 ist, d.h. $V = U_1 \oplus U_2$. Dann reduziert sich die Untersuchung von L auf die Untersuchung von $L|U_1 \in \operatorname{End}(U_1)$ und $L|U_2 \in \operatorname{End}(U_2)$. (Leider ist das nicht immer möglich, z.B. nicht für die "Scherung" $L \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^2)$ mit $\operatorname{Mat}(L) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.)

Man wird natürlich versuchen, solche L-invarianten Unterräume U_1 und U_2 in noch kleinere L-invariante Unterräume zu zerlegen, und dazu benötigen wir den Begriff der direkten Summe von endlich vielen Unterräumen (vgl. (3.19)–(3.21) und Blatt 3, Aufgabe 4): Sind $U_1, \ldots, U_k$ Unterräume eines Vektorraums V, so heißt V die direkte Summe von $U_1, \ldots, U_k$ (geschrieben $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_k = \bigoplus_{i=1}^{k} U_i$), falls gilt:

(i) $V = \operatorname{span}(\bigcup_{i=1}^{k} U_i)$ und

(ii) Für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ gilt: $U_i \cap \operatorname{span}(\bigcup_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k} U_j) = \{0\}$.

Daraus folgt: Ist für $i = 1, \ldots, k$ B_i eine Basis von U_i, so gilt $B_i \cap B_j = \emptyset$ für $i \neq j$, und $B := \bigcup_{i=1}^{k} B_i$ ist Basis von V. Ist $\dim V < \infty$, so folgt:

$$\dim V = \sum_{i=1}^{k} \dim U_i.$$

Im Fall eines euklidischen Vektorraums $(V, \langle , \rangle)$ ist folgender Spezialfall der direkten Summe wichtig:

(6.23) Def.: Seien $U_1, \ldots, U_k$ Unterräume von V Dann heißt V die orthogonale Summe von $U_1, \ldots, U_k$, falls gilt:

(i) $V = \operatorname{span}(\bigcup_{i=1}^{k} U_i)$ und
(ii) Für alle $1 \leq i \neq j \leq k$ gilt $U_i \subseteq U_j^{\perp}$.

Zur Bedingung (ii) sagt man, die U_i, $1 \leq i \leq k$, seien paarweise orthogonal.

Aus (6.23)(i) und (ii) folgt, daß V die direkte Summe von $U_1, \ldots, U_k$ ist.

(6.24) Satz. *Sei $L \in O(V)$. Dann existieren $k \in \mathbb{N}$, 2-dimensionale, L-invariante Unterräume $U_1, \ldots, U_k$ von V und L-invariante Unterräume U_- und U_+ von V, so daß V die orthogonale Summe von $U_1, \ldots, U_k$, U_-,U_+ ist und so daß gilt*

(i) $L|U_i \in SO(U_i) \setminus \{\pm \mathrm{id}_{U_i}\}$ *für* $1 \leq i \leq k$
(ii) $L|U_- = -(\mathrm{id}_{U_-})$
(iii) $L|U_+ = \mathrm{id}_{U_+}$

Bem.: 1) Es kann $k = 0$ oder $U_- = \{0\}$ oder $U_+ = \{0\}$ gelten.
2) Jedes $v \in V$ läßt sich dann eindeutig darstellen als

$$v = u_1 + \ldots + u_k + u_- + u_+$$

mit $u_i \in U_i$ für $1 \leq i \leq k$, $u_- \in U_-$ und $u_+ \in U_+$. Es gilt dann:

$$L(v) = L(u_1) + \ldots + L(u_k) - u_- + u_+.$$

L setzt sich also aus k "Drehungen" in den 2-dimensionalen Unterräumen U_i, $1 \leq i \leq k$, aus der "Punktspiegelung" $-(\mathrm{id}_{U_-})$ im Unterraum U_- und der Identität auf U_+ zusammen.

3) Es gilt $2k + \dim U_- + \dim U_+ = n$. Ist n ungerade, so folgt $\dim U_- + \dim U_+ \neq 0$.

4) $\det(L) = (-1)^{\dim U_-}$, vgl. Blatt 3, Aufgabe 3.

Umformuliert für Matrizen besagt (6.24):

(6.24)' Satz. *Sei $L \in O(V)$. Dann existieren eine ONB $\mathcal{G} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V, $k \in \mathbb{N}$ und $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in (0, \pi)$, so daß gilt:*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{G}}(L) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{matrix}} & & & & & & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{matrix}} & & & & & 0 & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & 0 & & \boxed{\begin{matrix} \cos\varphi_k & -\sin\varphi_k \\ \sin\varphi_k & \cos\varphi_k \end{matrix}} & & & & & \\ & & & & -1 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & -1 & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Äquivalent dazu ist: *Zu jedem $A \in O(n)$ existiert ein $B \in O(n)$, so daß $B^T A B$ die obige Form hat.*

(6.25) Lemma. Sei $L \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$. Dann existiert ein L-invarianter Untervektorraum U des $\mathbb{R}^n$ mit $0 < \dim U \leq 2$.

Bew.: Das wurde im 1. Schritt des Beweis von Satz (6.11) (Hauptachsentransformation) wie folgt gezeigt: Wir betrachten die $\mathbb{C}$-lineare Fortsetzung $\tilde{L}$ von L auf $\mathbb{C}^n$ und erhalten einen EW $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ mit α, $\beta \in \mathbb{R}$ und einen zugehörigen EV $v = x + iy \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ mit x, $y \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$$(*) \qquad L(x) = \alpha x - \beta y \text{ und } L(y) = \beta x + \alpha y.$$

Das zeigt, daß $\mathrm{span}\{x, y\}$ L-invariant ist. Wegen $v = x + iy \neq 0$ gilt $\mathrm{span}\{x, y\} \neq \{0\}$.

Beweis von (6.24): Durch vollständige Induktion nach $n = \dim V$.

Induktionsanfang: Ist $\dim V = 1$, so gilt $O(V) = \{\pm \mathrm{id}_V\}$. Die Behauptung ist richtig mit $k = 0$ und entweder $U_+ = V$ oder $U_- = V$.

Induktionsschritt: Sei $L \in O(V)$ und $\dim V = n > 1$. Wegen (6.9) genügt es, den Fall zu betrachten, daß $(V, \langle , \rangle)$ der $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt ist. Aus Lemma (6.25) folgt, daß ein L-invarianter Unterraum $U \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert mit $0 < \dim U \leq 2$.

(i) Gilt $n = 2$ und $U = \mathbb{R}^n$, so folgt die Behauptung aus (6.21):
Entweder L ist eine Spiegelung ($\to \mathrm{Mat}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{G}}(L) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ für eine geeignete ONB des $\mathbb{R}^2$), oder $L = D_\varphi$ für ein $\varphi \in [0, 2\pi)$.
Ist $\varphi = 0$, so $L = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ ($\Rightarrow k = 0$, $U_- = \{0\}$, $U_+ = \mathbb{R}^2$).
Ist $\varphi = \pi$, so $L = -\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ ($\Rightarrow k = 0$, $U_- = \mathbb{R}^2$, $U_+ = \{0\}$). Sonst gilt $D_\varphi \in SO(\mathbb{R}^2) \setminus \{\pm \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}\}$.

(ii) Gilt $U \subsetneqq \mathbb{R}^n$, so folgt aus (6.15)

$$\mathbb{R}^n = U \oplus U^\perp$$

Da U L-invariant ist und L orthogonal ist, ist auch $U^\perp$ L-invariant (vgl. Blatt 1, Aufgabe 1). Wegen $\dim U^\perp = n - \dim U < n$ ist auf $L|U^\perp$ die Induktionsvoraussetzung anwendbar. Daraus folgt zusammen mit unseren Kenntnissen über $O(\mathbb{R})$ und $O(\mathbb{R}^2)$ die Behauptung.

Die einzige zusätzliche Information, die man zum Beweis von (6.24)' benötigt, ist folgende: Ist $\dim V = 2$ und $L \in SO(V) \setminus \{\pm \mathrm{id}_V\}$, so existiert eine ONB $\mathcal{G}$ von V und $\varphi \in (0, \pi)$, so daß $\mathrm{Mat}^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}(L) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ gilt. Das sieht man so ein. Ist $\tilde{\mathcal{G}} = (v_1, v_2)$ irgendeine ONB von V, so existiert $\tilde\varphi \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ mit

$$\mathrm{Mat}^{\tilde{\mathcal{G}}}_{\tilde{\mathcal{G}}}(L) = \begin{pmatrix} \cos\tilde\varphi & -\sin\tilde\varphi \\ \sin\tilde\varphi & \cos\tilde\varphi. \end{pmatrix}$$

Ist $\tilde\varphi \in (\pi, 2\pi)$, so betrachten wir $\mathcal{G} = (v_1, -v_2)$ und erhalten

$$\mathrm{Mat}^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}(L) = \begin{pmatrix} \cos\tilde\varphi & \sin\tilde\varphi \\ -\sin\tilde\varphi & \cos\tilde\varphi. \end{pmatrix}$$

Wegen $\cos(-\tilde\varphi) = \cos\tilde\varphi$, $\sin(-\tilde\varphi) = -\sin\tilde\varphi$ folgt mit $\varphi := 2\pi - \tilde\varphi \in (0, \pi)$:

$$\mathrm{Mat}^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}(L) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi, \end{pmatrix}$$

wie behauptet.

Die anschauliche Begründung für die letzte Überlegung ist wie folgt: Ist $\dim V = 2$ und $L \in SO(V)$, so ist der “Drehwinkel” $\tilde\varphi$ von L erst nach Wahl einer Orientierung ($\Rightarrow$ eines “positiven Drehsinns”) für V definiert. Ändert man die Orientierung, so geht $\tilde\varphi$ in $-\tilde\varphi$ über. Ist $\tilde\varphi \in (\pi, 2\pi)$, so ist $-\tilde\varphi \in (-2\pi, -\pi)$ und statt $-\tilde\varphi$ kann man natürlich auch $\varphi := 2\pi - \tilde\varphi \in (0, \pi)$ nehmen.

Oft ist es wichtig zu wissen, ob die Unterräume in (6.24) und ob die Normalform in (6.24)' und die zugehörige ONB eindeutig durch L bestimmt sind.

Hierzu kann man folgendes sagen:
Es gilt $U_+ = \ker(L - \mathrm{id}_V)$, $U_- = \ker(L + \mathrm{id}_V)$, so daß U_-, U_+ und damit auch $k = \frac{1}{2}(n - (\dim U_- + \dim U_+))$ eindeutig durch L bestimmt sind. Die $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in (0, \pi)$ sind (bis auf ihre Reihenfolge) eindeutig durch L bestimmt (und damit auch die Normalform in (6.24)'), da $e^{i\varphi_1}, e^{-i\varphi_1}, \ldots e^{i\varphi_k}, e^{-i\varphi_k}$ gerade die Eigenwerte $\neq \pm 1$ von $\tilde L$ sind. Aus (6.24)' folgt nämlich sofort:

$$\det(L - \lambda\,\mathrm{id}) = \prod_{j=1}^{k} \underbrace{(\lambda^2 - 2(\cos\varphi_j)\lambda + 1)}_{(\lambda - e^{i\varphi_j})(\lambda - e^{-i\varphi_j})} \cdot (1+\lambda)^{\dim U_-} \cdot (1-\lambda)^{\dim U_+}$$

Eine ONB, in der die Matrix von L die Normalform (6.24)' annimmt, ist nicht eindeutig durch L bestimmt. Z.B. ist die Matrix einer Drehung, $D_\varphi \in SO(\mathbb{R}^2)$, $\varphi \in (0, \pi)$, bezüglich jeder positiv orientierten ONB des $\mathbb{R}^2$ in der Normalform $\begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{pmatrix}$.

Nach so vielen Worten möchte man hoffen, nun alles über orthogonale Abbildungen zu wissen. Weit gefehlt! Über die Gruppenstruktur von $SO(n)$ für $n \geq 3$ wurde etwa noch nichts gesagt. Man möchte auch gern die Elemente von $SO(3)$ durch 3 (warum gerade 3?) reelle "Parameter" beschreiben (so wie wir die Elemente von $SO(2)$ durch den Drehwinkel $\varphi \mod 2\pi$ beschrieben haben). Aber geht das und wie am besten? Da gibt es Fragen und Antworten, genug für ein ganzes Mathematikstudium...