7. Dualität

In diesem Kapitel geht es um die Begriffe "Dualraum" und "dualer Homomorphismus", die sowohl im endlich- wie im unendlich-dimensionalen Fall (hier als algebraischer Hintergrund für die "Funktionalanalysis") wichtig sind. Dennoch ist diesen Begriffen eine gewisse Unanschaulichkeit eigen. Neben der Vorbereitung auf weiterführende Gegenstände dient dieses Kapitel auch einer sachgerechten Behandlung der Transposition von Matrizen (vgl. (5.16) und (4.23)).

Im folgenden sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Eine Linearform auf V ist eine Abbildung $l : V \to K$, so daß für alle $\alpha, \beta \in K$ und alle $v, w \in V$ gilt:

$$l(\alpha v + \beta w) = \alpha l(v) + \beta l(w).$$

Mit anderen Worten ausgedrückt ist eine Linearform l gerade ein Vektorraumhomomorphismus von V in den 1-dimensionalen K-Vektorraum K, d.h. $l \in \mathrm{Hom}(V, K)$, vgl. (4.1). In (4.9) wird erklärt, daß $\mathrm{Hom}(V, K)$ eine natürliche K-Vektorraumstruktur besitzt, in der etwa die Addition von zwei Linearformen $l_1, l_2 \in \mathrm{Hom}(V, K)$ "punktweise" definiert ist durch:

$$\forall v \in V : \quad (l_1 + l_2)(v) := l_1(v) + l_2(v).$$

(7.1) Definition. Der K-Vektorraum $V^* := \mathrm{Hom}(V, K) = \{l : V \to K \mid l \text{ Linearform}\}$ heißt Dualraum von V.

Bem.: Aus (4.12)–(4.14) folgt: Ist $\dim V < \infty$, so gilt $\dim V^* = \dim V$.

Erinnerung an (4.6): Ist B eine Basis von V und $\tilde{l} : B \to K$ irgendeine Abbildung, so existiert genau ein $l \in V^*$ mit $l \mid B = \tilde{l}$, d.h. mit $l(v) = \tilde{l}(v)$ für alle $v \in B$.

Im Spezialfall $V = K^n$ mit der Standardbasis $(e_1, \ldots, e_n)$ erhalten wir: Ist $l \in (K^n)^*$ und $l(e_i) =: a_i \in K$ für $1 \le i \le n$, so gilt

$$l(x_1, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i.$$

(Denn $l(x_1, \ldots, x_n) = l(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i l(e_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$.) In diesem Fall ist eine Linearform $l \in (K^n)^*$ also "nichts anderes" als die linke Seite einer einzigen homogenen linearen Gleichung (mit n Unbekannten in K), und die Vektorraumstruktur in $(K^n)^*$ formalisiert genau das, was wir schon immer (Gaußsches Eliminationsverfahren) mit solchen Gleichungen getan haben: wir haben sie mit Körperelementen multipliziert und zueinander addiert. Bezüglich einer Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ eines n-dimensionalen K-Vektorraums V entspricht nach (4.11) einem $l \in V^*$ die $(1 \times n)$-Matrix $(a_1, \ldots, a_n) \in K^{1 \times n}$ mit $a_i = l(v_i)$ für $1 \le i \le n$, die man oft auch als "Zeilenvektor" interpretiert.

Bsp.: Auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = C^0([a,b],\mathbb{R}) = \{f \mid f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}$ ist die Integration eine Linearform, d.h. definiert man für alle $f \in V$

$$l(f) := \int_a^b f(t)dt,$$

so gilt $l \in V^*$.

(7.2) Satz. *Sei* $\dim V = n$ *und* $\mathcal{G} = (v_1, \ldots, v_n)$ *eine Basis von* V. *Definiere* $l_i \in V^*$ *für* $1 \le i \le n$ *durch*

$$l_i(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad \text{für } 1 \le j \le n.$$

Dann ist $\mathcal{G}^* = (l_1, \ldots, l_n)$ *Basis von* V^*, *genannt die* <u>*Dualbasis*</u> <u>*zu*</u> $\mathcal{G}$.
Für alle $l \in V^*$ *gilt:* $l = \sum_{i=1}^{n} l(v_i) l_i$.

Bew.:

(i) $\mathcal{G}^*$ ist linear unabhängig: Sei $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i l_i = 0$. Dann gilt für $1 \le j \le n$:
$0 = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i l_i)(v_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i l_i(v_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_j$.

(ii) $\mathcal{G}^*$ erzeugt V^*: Wir zeigen, daß für jedes $l \in V^*$ gilt: $l = \sum_{i=1}^{n} l(v_i) l_i$. Da beiden Seiten dieser Gleichung Linearformen sind, genügt es nachzuweisen, daß beide Seiten auf allen Basiselementen $v_j, 1 \le j \le n$, die gleichen Werte annehmen, vgl. (4.6):

$$\left(\sum_{i=1}^{n} l(v_i) l_i \right)(v_j) = \sum_{i=1}^{n} l(v_i) l_i(v_j) = \sum_{i=1}^{n} l(v_i) \delta_{ij} = l(v_j).$$

<u>Wichtige Bemerkung</u>: Analog kann man im Fall $\dim V = \infty$ aus einer Basis B eine (ebenfalls unendliche) linear unabhängige Menge $B^* \subseteq V^*$ konstruieren ($\Rightarrow \dim V^* = \infty$). Es gilt aber nicht $\operatorname{span} B^* = V^*$, z.B. läßt sich die Linearform $l \in V^*$ mit $l(b) = 1$ für alle $b \in B$ <u>nicht</u> als (endliche!) Linearkombination von Elementen aus B^* darstellen.

(7.3) Def.: Sind V, W K-Vektorräume und ist $L \in \operatorname{Hom}(V,W)$, so heißt die Abbildung $L^* : W^* \to V^*$, die durch

$$L^*(l) = l \circ L \quad (\text{oder explizit:} \forall v \in V \text{ gilt } (L^*(l))(v) = l(L(v)))$$

definiert ist, die zu L duale Abbildung.

(7.4) Fakt. (i) Die Abbildung $L \in \operatorname{Hom}(V,W) \to L^* \in \operatorname{Hom}(W^*,V^*)$ ist ein injektiver K-Vektorraumhomomorphismus von $\operatorname{Hom}(V,W)$ nach $\operatorname{Hom}(W^*,V^*)$.
(ii) Ist Z ein weiterer K-Vektorraum und ist $J \in \operatorname{Hom}(V,W), L \in \operatorname{Hom}(W,Z)$,
so gilt: $(L \circ J)^* = J^* \circ L^* \in \operatorname{Hom}(Z^*,V^*)$.
Außerdem gilt: $(\mathrm{id}_V)^* = \mathrm{id}_{V^*}$.

Bem.:

1) Aus (4.13), (4.14) und (7.2) folgt, im Fall $\dim V = n < \infty$, $\dim W = m < \infty$: $\dim \mathrm{Hom}(V,W) = m \cdot n = \dim \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$. In diesem Fall ist also die Abbildung $L \in \mathrm{Hom}(V,W) \to L^* \in \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$ ein Isomorphismus, vgl. (4.8).
2) In der Sprache der Kategorien besagt (7.4)(ii), daß * ein kontravarianter Funktor auf der Kategorie der K-Vektorräume ist.

Bew.:

(i) Zeige z.B.: $L_1, L_2 \in \mathrm{Hom}(V,W) \Rightarrow (L_1+L_2)^* = L_1^*+L_2^*$. Denn es gilt für alle $l \in W^*$: $(L_1+L_2)^*(l) = l \circ (L_1+L_2) \overset{l \text{ linear}}{=} l \circ L_1 + l \circ L_2 = L_1^*(l) + L_2^*(l) = (L_1^*+L_2^*)(l)$.
Injektivität: Zeige $L \neq 0 \Rightarrow L^* \neq 0$. Ist $L \neq 0$, so existiert ein $v \in V$ mit $L(v) \neq 0$. Ergänze $w := L(v) \neq 0$ zu einer Basis B von W und definiere $l \in W^*$ durch $l(w) = 1$, $l(w') = 0$ für $w' \in B \setminus \{w\}$. Dann gilt $1 = l(L(v)) = (L^*(l))(v)$, also $L^*(l) \neq 0$, also $L^* \neq 0$.
(ii) Für $l \in Z^*$ gilt $(L \circ J)^*(l) = l \circ (L \circ J) = (l \circ L) \circ J = J^*(l \circ L) = J^*(L^*(l)) = (J^* \circ L^*)(l)$.

(7.5) Fakt. Sind $\mathcal{G}_V = (v_1, \ldots, v_n)$ bzw. $\mathcal{G}_W = (w_1, \ldots, w_m)$ Basen von V bzw. W und ist $l \in \mathrm{Hom}(V,W)$, so gilt:

$$\mathrm{Mat}^{\mathcal{G}_V^*}_{\mathcal{G}_W^*}(L^*) = \left(\mathrm{Mat}^{\mathcal{G}_W}_{\mathcal{G}_V}(L)\right)^T$$

(oder mit Worten: Bezüglich dualer Basen ist die Matrix von L^* gerade die transponierte Matrix von L).

Bem.: Aus (7.4)(ii) und (7.5) folgt, daß für alle $A \in K^{m \times n}$, $B \in K^{n \times p}$ gilt:

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T,$$

was man auch leicht direkt nachrechnen kann.

Bew.: Sei $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} = \mathrm{Mat}^{\mathcal{G}_W}_{\mathcal{G}_V}(L)$, d.h. es gilt

$$L(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \text{ für } 1 \leq j \leq n.$$

Sei $\mathcal{G}_V^* = (l_1, \ldots, l_n)$, $\mathcal{G}_W^* = (f_1, \ldots, f_m)$. Dann ist $B = (b_{kr})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq r \leq m}} = \mathrm{Mat}^{\mathcal{G}_{V^*}}_{\mathcal{G}_W^*}(L^*)$ durch

$$L^*(f_r) = \sum_{k=1}^{n} b_{kr} l_k \text{ definiert.}$$

Dann gilt für $1 \leq j \leq n$, $1 \leq r \leq m$:

$$(L^*(f_r))(v_j) = \sum_{k=1}^{n} b_{kr} l_k(v_j) = \sum_{k=1}^{n} b_{kr} \delta_{kj} = b_{jr}.$$

Also

$$\begin{aligned} b_{jr} &= (L^*(f_r))(v_j) = f_r(L(v_j)) = f_r\left(\sum_{i=1}^m a_{ij} w_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^m a_{ij} f_r(w_i) = \sum_{i=1}^m a_{ij}\delta_{ri} = a_{rj}, \end{aligned}$$

d.h. $B = A^T$.

Bez.: $V^{**} := (V^*)^* = \operatorname{Hom}(V^*, K)$ heißt der Bidualraum von V.

(7.6) Fakt. Es existiert ein "natürlicher" injektiver Homomorphismus

$$h = h_V : V \to V^{**}$$

definiert durch: Für alle $v \in V$, $l \in V^*$ gilt

$$(h(v))(l) := l(v).$$

Bem.:

1) Ist $\dim V < \infty$, so ist $h : V \to V^{**}$ ein Isomorphismus, da $\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V$.
2) h heißt "natürlich (oder kanonisch)", weil h unabhängig von irgendwelchen Wahlen (z.B. von Basen) definiert ist. In der Sprache der "Kategorien" läßt sich die Natürlichkeit von h mathematisch präzis formulieren.

Bew.: Injektivität von h: Ist $v \in V \setminus \{0\}$, so existiert ein $l \in V^*$ mit $l(v) \neq 0$ (vgl. den Beweis von (7.4)(i)). Dann gilt $(h(v))(l) = l(v) \neq 0$, also $h(v) \in V^{**} \setminus \{0\}$.

Bez.: Zu einem Untervektorraum U von V definieren wir

$$U^s := \{l \in V^* \mid \forall u \in U : l(u) = 0\}.$$

Zu einem Untervektorraum W von V^* definieren wir

$$W_s := \{v \in V \mid \forall l \in W : l(v) = 0\}.$$

Dann ist U^s Untervektorraum von V^* und W_s Untervektorraum von V, und es gilt

(7.7) Satz. Ist $\dim V < \infty$, so

(i) $\dim U + \dim U^s = \dim V$
(ii) $(U^s)^s = h(U) \subseteq V^{**}$
(iii) $\dim W + \dim W_s = \dim V$

Bem.: (7.7)(iii) kann als Präzisierung und Verallgemeinerung von (3.25) angesehen werden: Ist I ein homogenes lineares Gleichungssystem mit k Gleichungen für n Unbekannte (in K), so gilt $\dim L_I \geq n-k$. Jede Gleichung ist gegeben durch eine Linearform $l_1, \ldots, l_k \in (K^n)^*$. Wir setzen $W := \operatorname{span}\{l_1, \ldots, l_k\} \subseteq (K^n)^*$. Dann gilt $L_I = W_s$ und (7.7)(iii) impliziert: $\dim L_I = \dim W_s = n - \dim W \geq n - k$ mit "=" genau dann, wenn die "Gleichungen" $l_1, \ldots, l_k$ linear unabhängig sind. (Ausgedrückt mittels Matrizen folgt Entsprechendes aus (4.21), (4.22)).

Bew.:

(i) Mit der Bemerkung nach (3.13) ("Basisergänzungssatz") können wir eine Basis $\mathcal{G} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V finden, so daß für $k := \dim U$ gilt:

$$U = \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_k\}.$$

Sei $\mathcal{G}^*$ die zu $\mathcal{G}$ duale Basis. Dann gilt mit (7.2):

$$\begin{aligned} l = \sum_{i=1}^{n} l(v_i) l_i \text{ liegt in } U^s &\Leftrightarrow l(v_i) = 0 \text{ für } i = 1, \ldots, k \\ &\Leftrightarrow l = \sum_{i=k+1}^{n} l(v_i) l_i \Leftrightarrow l \in \operatorname{span}\{l_{k+1}, \ldots, l_n\}. \end{aligned}$$

D.h. $U^s = \operatorname{span}\{l_{k+1}, \ldots, l_n\}$ und speziell:

$$\dim U^s = n - k = \dim V - \dim U.$$

(ii) Zeige: $h(U) \subseteq (U^s)^s$. Sei $v \in U$ und $l \in U^s$. Dann gilt

$$(h(v))(l) = l(v) = 0,$$

also $h(v) \in (U^s)^s$. Nach (i) gilt $\dim (U^s)^s = \dim V^* - \dim U^s = \dim V^* - (\dim V - \dim U) = \dim U$. Da h injektiv ist, gilt $\dim h(U) = \dim U (= \dim (U^s)^s)$. Wegen $h(U) \subseteq (U^s)^s$, folgt $h(U) = (U^s)^s$.

(iii) Wir zeigen, daß $W^s = h(W_s)$ gilt, denn daraus folgt mit (i): $\dim W_s = \dim h(W_s) = \dim W^s = \dim V - \dim W$. Ist $w \in W_s$, so gilt für alle $l \in W$: $0 = l(w) = (h(w))(l)$. Daraus folgt $h(w) \in W^s$. Ist $\overline{v} \in W^s \subseteq V^{**}$, so existiert nach (7.6), Bem. 1), ein $v \in V$ mit $h(v) = \overline{v}$. Dann gilt für alle $l \in W$: $0 = \overline{v}(l) = (h(v))(l) = l(v)$. Also $v \in W_s$, und damit $\overline{v} = h(v) \in h(W_s)$.

(7.8) Satz. *Seien V und W K-Vektorräume, $L \in \operatorname{Hom}(V, W)$. Dann gilt:*

(i) $\ker L^* = (\operatorname{im} L)^s$

(ii) $\ker L = (\operatorname{im} L^*)_s$

Speziell: *L surjektiv $\Leftrightarrow$ L^* injektiv*

L^* surjektiv $\Rightarrow$ L injektiv. Die Umkehrung gilt, falls $\dim W < \infty$.

Bew.:

(i) Zeige: $\ker L^* \subseteq (\operatorname{im} L)^s$. Ist $l \in \ker L^* \subseteq W^*$, so gilt für alle $v \in V$:

$$0 = (L^*(l))(v) = l(L(v)), \text{ d.h. } l \in (\operatorname{im} L)^s.$$

Zeige: $(\operatorname{im} L)^s \subseteq \ker L^*$. Ist $l \in (\operatorname{im} L)^s$, so gilt für alle $v \in V$:

$$l(L(v)) = 0, \text{ also } (L^*(l))(v) = 0. \text{ Daraus folgt } l \in \ker L^*.$$

(ii) Analog zu (i).

"Speziell": vgl. Anwesenheitsaufgabe 4 auf Blatt 4a.

(7.9) Folgerung. Seien V und W K-Vektorräume, $\dim W < \infty$ und $L \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Dann gilt: $\dim(\mathrm{im}\, L) = \dim(\mathrm{im}\, L^*)$.

Bew.: $$\begin{aligned} \dim(\mathrm{im}\, L^*) &\overset{(4.8)}{=} \dim W^* - \dim(\ker L^*) \overset{(7.2)}{=} \dim W - \dim(\ker L^*) = \\ &\overset{(7.8)(\mathrm{i})}{=} \dim W - \dim((\mathrm{im}\, L)^s) \overset{(7.7)(\mathrm{i})}{=} \dim W - (\dim W - \dim(\mathrm{im}\, L)) \\ &= \dim(\mathrm{im}\, L) \end{aligned}$$

Eine der berühmtesten mathematischen Erkenntnisse der letzten 50 Jahre – der Atiyah-Singer-Indexsatz – hat damit zu tun, daß (7.9) ohne die Voraussetzung "$\dim W < \infty$" nicht gilt.

Bem.: (7.5) und (7.9) bilden den mathematischen Hintergrund für Satz (4.23) ("Zeilenrang = Spaltenrang"), d.h. $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^T)$.

Zusammenhang: Dualraum $\leftrightarrow$ Bilinearformen

Zu einem K-Vektorraum V betrachten wir die Menge

$$B(V) = \{b \mid b : V \times V \to K \text{ bilinear}\}$$

der Bilinearformen auf V. Sie bildet (mit den wie üblich "punktweise"definierten Verknüpfungen) selbst einen K-Vektorraum. Jedes $b \in B(V)$ definiert Abbildungen $\lambda(b) \in \mathrm{Hom}(V, V^*)$ und $\rho(b) \in \mathrm{Hom}(V, V^*)$ durch: Für alle $v \in V$ ist $\lambda(b)(v) \in V^*$ durch

$$\lambda(b)(v) = b(v, \cdot)$$

definiert, d.h. $(\lambda(b)(v))(w) = b(v, w)$ für alle $w \in V$.

Analog ist $\rho(b) \in \mathrm{Hom}(V, V^*)$ definiert durch:

Für alle $v \in V$ gilt $\rho(b)(v) = b(\cdot, v)$, d.h.

$$(\rho(b)(v))(w) = b(w, v) \text{ für alle } w \in V.$$

Man prüft nach, daß in der Tat $\lambda(b), \rho(b) \in \mathrm{Hom}(V, V^*)$.

(7.10) Def.: $b \in B(V)$ heißt nicht ausgeartet, falls folgende Bedingungen (i) und (ii) gelten:

(i) Ist $v \in V$ und gilt $b(v, w) = 0$ für alle $w \in V$, so gilt $v = 0$.
(ii) Ist $v \in V$ und gilt $b(w, v) = 0$ für alle $w \in V$, so gilt $v = 0$.

Bsp.: Jedes Skalarprodukt ist eine nicht ausgeartete Bilinearform. ($\langle v, w\rangle = 0\ \forall w \in V \Rightarrow \langle v, v\rangle = \|v\|^2 = 0 \Rightarrow v = 0$.)

Bem.: Die Bedingung (7.10)(i) ist äquivalent dazu, daß $\lambda(b) \in \mathrm{Hom}(V, V^*)$ injektiv ist, und (7.10)(ii) ist äquivalent dazu, daß $\rho(b)$ injektiv ist.

(7.11) Satz. *Die Abbildungen*

$$\lambda : B(V) \to \mathrm{Hom}(V, V^*), b \in B(V) \to \lambda(b) \in \mathrm{Hom}(V, V^*)$$

und

$$\rho(b) : B(V) \to \mathrm{Hom}(V,V^*), b \in B(V) \to \rho(b) \in \mathrm{Hom}(V,V^*)$$

sind natürliche K-Vektorraumisomorphismen.

(7.11) besagt, daß ein Homomorphismus $V \to V^*$ "nichts anderes" als eine (etwas anders geschriebene) Bilinearform auf V ist.

Bew.: Linearität von λ, z.B.:

$$\begin{aligned}(\lambda(b_1+b_2))(v) &= (b_1+b_2)(v,\cdot) = b_1(v,\cdot)+b_2(v,\cdot)\\ &= (\lambda(b_1))(v)+(\lambda(b_2))(v) = (\lambda(b_1)+\lambda(b_2))(v).\end{aligned}$$

Injektivität von λ: $b \neq 0 \to \exists v,w \in V$: $b(v,w) \neq 0 \Rightarrow$

$$(\lambda(b)(v))(w) \neq 0 \Rightarrow \lambda(b)(v) \neq 0 \Rightarrow \lambda(b) \neq 0.$$

Surjektivität von λ: Sei $L \in \mathrm{Hom}(V,V^*)$. Definiere $b : V \times V \to K$ durch $b(v,w) = (L(v))(w)$. Dann gilt $b \in B(V)$ und für alle $v \in V$:

$$\lambda(b)(v) = b(v,\cdot) = L(v), \text{ d.h. } \lambda(b) = L.$$

Bem.: Ist $b \in B(V)$, so ist $\lambda(b)^* \in \mathrm{Hom}(V^{**},V^*)$, und es gilt für alle $v,w \in V$:

$$(\lambda(b)^*(h(v)))(w) = h(v)(\lambda(b)(w)) = b(w,v).$$

Ist $\dim V < \infty$, so können wir aus dieser Bemerkung ableiten, daß die Bedingungen (7.10)(i) und (ii) äquivalent sind: $b \in B(V)$ und (7.10)(i) gilt $\Leftrightarrow \lambda(b) \in \mathrm{Hom}(V,V^*)$ ist injektiv $\overset{(7.9)}{\Leftrightarrow} \lambda(b)^* \in \mathrm{Hom}(V^{**},V^*)$ ist injektiv $\overset{\text{Bem.}}{\Leftrightarrow}$ (7.10)(ii) gilt für b.

(7.12) Folgerung. Sei $\dim V < \infty$ und $b \in B(V)$ nicht ausgeartete Bilinearform. Dann existiert zu jedem $l \in V^*$ genau ein $v \in V$, so daß für alle $w \in V$ gilt:

$$l(w) = b(v,w),$$

nämlich $v = \lambda(b)^{-1}(l)$. Analog existiert genau ein $v' \in V$, so daß für alle $w \in V$ gilt

$$l(w) = b(w,v'),$$

nämlich $v' = \rho(b)^{-1}(l)$.

Bew.: Da b nicht ausgeartet ist, sind $\lambda(b) \in \mathrm{Hom}(V,V^*)$ und $\rho(b) \in \mathrm{Hom}(V,V^*)$ injektiv, vgl. Bem. nach (7.10). Wegen $\dim V = \dim V^* < \infty$ sind $\lambda(b), \rho(b)$ Isomorphismen von V nach V^*. Ist $v := \lambda(b)^{-1}(l)$ und $w \in V$ beliebig, so gilt

$$b(v,w) = (\lambda(b)(v))(w) = (\lambda(b)(\lambda(b)^{-1}(l)))(w) = l(w).$$

Ist umgekehrt $v \in V$ und gilt für alle $w \in V$: $b(v,w) = l(w)$, so folgt

$$b(v,w) = (\lambda(b)(v))(w) = l(w),$$

d.h. $\lambda(b)(v) = l$, und damit $v = \lambda(b)^{-1}(l)$.