Nachtrag: Orientierung von $\mathbb{R}$-Vektorräumen.

Wir wollen nun (7.12) benutzen, um das Kreuzprodukt (auch Vektorprodukt genannt) zu definieren. Dazu benötigen wir den Begriff des "orientierten $\mathbb{R}$-Vektorraums". Das folgende ist eine Verallgemeinerung von (5.25), und zwar auf den Fall beliebiger $\mathbb{R}$-Vektorräume V, mit $1 \leq \dim V = n < \infty$.

(7.13) Def.: Zwei Basen $(v_1, \ldots, v_n)$, $(w_1, \ldots, w_n)$ von V heißen gleich orientiert, falls für den Endomorphismus $L \in \mathrm{End}(V)$, der durch $L(v_i) = w_i$, $1 \leq i \leq n$, definiert ist, gilt: $\det L > 0$.

Bem.: 1) $(v_1, \ldots, v_n)$ und $(w_1, \ldots, w_n)$ sind genau dann gleich orientiert, falls für eine ($\Rightarrow$ jede) Determinantenform D auf V gilt:

$$\frac{D(w_1, \ldots, w_n)}{D(v_1, \ldots, v_n)} > 0, \text{ vgl. (5.19).}$$

2) "gleich orientiert" ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der geordneten Basen V mit zwei Äquivalenzklassen.

(7.14) Def.: Eine Orientierung von V ist die Auswahl einer der beiden Äquivalenzklassen von geordneten Basen von V. Die Basen in der ausgewählten Äquivalenzklasse heißen positiv orientiert.

Bsp.: Die "übliche Orientierung" des $\mathbb{R}^n$ besteht in der Auswahl der Äquivalenzklasse, die die Standardbasis $(e_1, \ldots, e_n)$ enthält, vgl. (5.25).

Bez.: Sei $(V, \langle , \rangle)$ orientierter euklidischer Vektorraum, $0 < \dim V = n < \infty$. Dann existiert genau eine Determinantenform D auf V, so daß für eine ($\Rightarrow$ jede) positiv orientierte ONB von V gilt: $D(v_1, \ldots, v_n) = 1$. Dieses D heißt die kanonische Determinantenform von V.

Bem.: Ist $(v_1, \ldots, v_n)$ positiv orientierte ONB von V, so kann man für beliebige $(w_1, \ldots, w_n) \in V^n$ den Wert $D(w_1, \ldots, w_n)$ wie folgt berechnen: Ist $w_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$ und $A := (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, so gilt $D(w_1, \ldots, w_n) = \det A$. Das liegt daran, daß diese Formel eine Determinantenform definiert, die auf der gegebenen, positiv orientierten ONB $(v_1, \ldots, v_n)$ den Wert 1 hat (da in diesem Fall $A = E_n$ gilt).

Speziell ist im Fall $V = \mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt und der üblichen Orientierung, die kanonische Determinantenform gerade die "Standarddeterminantenform" D_0, vgl. (5.13).

Das Kreuzprodukt

(7.15) Def.: Sei $(V, \langle , \rangle)$ orientierter euklidischer Vektorraum, $3 \leq \dim V = n < \infty$, mit kanonischer Determinantenform D. Zu je $n-1$ Vektoren $w_1, \ldots, w_{n-1}$ in V existiert genau ein Vektor $w \in V$, so daß für alle $v \in V$ gilt:

$$(*) \qquad D(w_1, \ldots, w_{n-1}, v) = \langle w, v \rangle.$$

Dieses w heißt das Kreuzprodukt von $w_1, \ldots, w_{n-1}$ und wird durch das Symbol $w_1 \times \ldots \times w_{n-1}$ bezeichnet.
Begründung: Die Abbildung $v \in V \to D(w_1, \ldots, w_{n-1}, v) \in \mathbb{R}$ ist eine Linearform auf V. Da $\langle , \rangle$ eine nichtausgeartete Bilinearform ist, folgt Existenz und Eindeutigkeit eines Vektors w, der $(*)$ für alle $v \in V$ erfüllt, aus Folgerung (7.12).

Bem.: Es ist nur das Kreuzprodukt $w_1 \times \ldots \times w_{n-1}$ von $n-1$ Vektoren ($n = \dim V$) definiert, d.h. für zwei Vektoren $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^4$ ist $w_1 \times w_2$ nicht definiert!

Eigenschaften des Kreuzprodukts:

(i) Die Abbildung $(w_1, \ldots, w_{n-1}) \in V \times \ldots \times V \to w_1 \times \ldots \times w_{n-1} \in V$ ist multilinear und alternierend. Speziell gilt: $w_1, \ldots, w_{n-1}$ linear abhängig $\Rightarrow w_1 \times \ldots \times w_{n-1} = 0$. Z.B. beweist man wie folgt die Additivität im 1. Argument:

$$\begin{aligned}
&\langle (w_1 + w_1') \times w_2 \times \ldots \times w_{n-1}, \cdot \rangle = D(w_1 + w_1', w_2, \ldots, w_{n-1}, \cdot) \\
&= D(w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}, \cdot) + D(w_1', w_2, \ldots, w_{n-1}, \cdot) \\
&= \langle w_1 \times w_2 \times \ldots \times w_{n-1}, \cdot \rangle + \langle w_1' \times w_2 \times \ldots \times w_{n-1}, \cdot \rangle \\
&= \langle w_1 \times \ldots \times w_{n-1} + w_1' \times w_2 \times \ldots \times w_{n-1}, \cdot \rangle
\end{aligned}$$

(ii) $L \in O(V) \Rightarrow L(w_1) \times \ldots \times L(w_{n-1}) = \det L \cdot L(w_1 \times \ldots \times w_{n-1})$.
Bew.: $\langle L(w_1) \times \ldots \times L(w_{n-1}), v \rangle = D(L(w_1), \ldots, L(w_n), L(L^{-1}(v)))$
$= \det L \, D(w_1, \ldots, w_{n-1}, L^{-1}(v)) = \det L \cdot \langle w_1 \times \ldots \times w_{n-1}, L^{-1}(v) \rangle$
$\overset{L \in O(V)}{=} \langle \det L \cdot L(w_1 \times \ldots \times w_{n-1}), v \rangle$

(iii) "Geometrische Definition des Kreuzprodukts": Sind $w_1, \ldots, w_{n-1}$ linear unabhängig, so ist $w_1 \times \ldots \times w_{n-1}$ der eineutig bestimmte Vektor mit:
(a) $w_1 \times \ldots \times w_{n-1} \in (\mathrm{span}\{w_1, \ldots, w_{n-1}\})^\perp$,
(b) $(w_1, \ldots, w_{n-1}, w_1 \times \ldots \times w_{n-1})$ ist positiv orientierte Basis von V, und
(c) $\| w_1 \times \ldots \times w_{n-1} \| = \mathrm{vol}_{n-1}^{\langle , \rangle}(P(w_1, \ldots, w_{n-1}))$.

Wir zeigen, daß $w_1 \times \ldots \times w_{n-1}$ die Eigenschaften (a)–(c) hat:
zu (a): $\langle w_i, w_1 \times \ldots \times w_{n-1} \rangle = D(w_1, \ldots, w_{n-1}, w_i) = 0$ für $1 \le i \le n-1$.
zu (b):
$$\begin{aligned}
D(w_1, \ldots, w_{n-1}, w_1 \times \ldots \times w_{n-1}) &= \langle w_1 \times \ldots \times w_{n-1}, w_1 \times \ldots \times w_{n-1} \rangle \\
&= \| w_1 \times \ldots \times w_{n-1} \|^2 .
\end{aligned}$$

zu (c): Zeige zunächst: $w_1, \ldots, w_{n-1}$ linear unabhängig $\Rightarrow w := w_1 \times \ldots \times w_{n-1} \neq 0$.

Ergänze $w_1, \ldots, w_{n-1}$ zu einer Basis $(w_1, \ldots, w_{n-1}, v)$ von V.
Dann gilt $0 \neq D(w_1, \ldots, w_{n-1}, v) = \langle w_1 \times \ldots \times w_{n-1}, v \rangle$, also $w = w_1 \times \ldots \times w_{n-1} \neq 0$.

Nun ist die Abbildung, die $v_1, \ldots, v_{n-1} \in \mathrm{span}\{w_1, \ldots, w_{n-1}\}$ die reelle Zahl $D\left(v_1, \ldots, v_{n-1}, \frac{w}{\|w\|}\right)$ zuordnet, eine normierte Determinantenform auf $\mathrm{span}\{w_1, \ldots, w_{n-1}\}$, also

$$\mathrm{vol}_{n-1}^{\langle , \rangle}(P(w_1, \ldots, w_{n-1})) = D\left(w_1, \ldots, w_{n-1}, \frac{w}{\|w\|}\right) \overset{(b)}{=} \| w_1 \times \ldots \times w_{n-1} \| .$$

Umgekehrt sieht man leicht, daß ein Vektor durch die Eigenschaften (a)–(c) eindeutig bestimmt ist.

Schließlich leiten wir eine explizite Formel her, die es erlaubt, $w_1 \times \ldots \times w_{n-1}$ aus den Komponenten von $w_1, \ldots, w_{n-1}$ bezüglich einer positiv orientierten ONB zu berechnen.

(7.16) Fakt. Ist $(v_1, \ldots, v_n)$ positiv orientierte ONB von V und $w_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$ für $1 \leq j \leq n-1$, so gilt

$$w_1 \times \ldots \times w_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} \big((-1)^{n+i} \det A_i\big)\, v_i,$$

wobei $A^i \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ aus $A := (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n-1}} \in \mathbb{R}^{n\times(n-1)}$ durch Streichen der i'ten Zeile entsteht.

Bsp.: Im Fall von $V = \mathbb{R}^3$ mit der üblichen Orientierung und dem Standardskalarprodukt betrachten wir die positiv orientierte ONB (e_1, e_2, e_3) und

$$\begin{aligned} w_1 &=: & a = (a_1, a_2, a_3) = \sum_{i=1}^{3} a_i\, e_i \in \mathbb{R}^3 \text{ und} \\ w_2 &=: & b = (b_1, b_2, b_3) = \sum_{i=1}^{3} b_i\, e_i \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Dann ist $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_2 \end{pmatrix}$$

und es gilt: $a \times b = \sum_{i=1}^{3} ((-1)^{i+3} \det A_i)\, e_i = (a_2b_3 - a_3b_1, -a_1b_3 + a_3b_1, a_1b_2 - a_2b_1)$.

Bew. von (7.16): Für alle $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i v_i \in V$ gilt aufgrund der Bem. nach (7.14):

$$\begin{aligned} D(w_1, \ldots, w_{n-1}, x) &= \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n-1} & x_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn-1} & x_n \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{Entwicklung nach} \\ \text{der letzten Spalte}}}{=} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+i} \det A_i x_i \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} ((-1)^{n+i} \det A_i)\, v_i, x \right\rangle. \end{aligned}$$

Also: $w_1 \times \ldots \times w_{n-1} = \sum\limits_{i=1}^{n} ((-1)^{n+i} \det A_i)\, v_i$.

Bsp.: Es sei $V = \mathbb{R}^{n+1}$ mit üblicher Orientierung und Standardskalarprodukt. Es sei $e_1, \dots, e_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ und $s_1, \dots, s_n$ reelle Zahlen. Wir betrachten die Vektoren $w_1 := (e_1, s_1), \dots, w_n := (e_n, s_n)$ im $\mathbb{R}^{n+1}$. Dann gilt:

$$\mathrm{vol}_n^{\langle,\rangle}(P(w_1, \dots, w_n)) = \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n} (s_i)^2}$$

(vgl. Blatt 2, Aufgabe 4 für die Fälle $n = 2, 3$).

Bew.: Nach (c) und (7.16) gilt:

$$\mathrm{vol}_n(P(w_1, \dots, w_n)) \overset{(c)}{=} \| w_1 \times \dots \times w_n \| \overset{(7.16)}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} (\det A_i)^2}, \text{ wobei}$$

A_i aus der $((n+1) \times n)$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & \dots & \dots & 1 \\ s_1 & s_2 & \dots & \dots & s_n \end{pmatrix}$$

durch Streichen der i'ten Zeile entsteht. Offensichtlich gilt $\det A_{n+1} = 1$ und $|\det A_i| = |s_i|$ für $1 \leq i \leq n$.