Nachtrag: Quotientenraum (manchmal auch Faktorraum genannt).

Vor der Beschäftigung mit diesem Nachtrag ist es gut, sich (1.23), (1.24) und die darauf folgenden Tatsachen über Äquivalenzrelationen ins Gedächtnis zu rufen.

Sei V ein K-Vektorraum und U Untervektorraum von V. Wir definieren eine Äquivalenzrelation $\sim_U$ auf V durch:

$$v \sim_U w \Leftrightarrow v - w \in U.$$

Die Transitivität von $\sim_U$ sieht man so ein:

$$v \sim_U w \text{ und } w \sim_U z \Rightarrow v - w \in U \text{ und } w - z \in U \overset{U \text{ Untervektorraum}}{\Longrightarrow}$$
$$(v - w) + (w - z) = v - z \in U \Rightarrow v \sim_U z.$$

Bem.: Die Äquivalenzklasse von $v \in V$ bezüglich $\sim_U$ ist genau der affine Unterraum $v+U = \{v + u \mid u \in U\}$, vgl. (3.26) und die Abschnitte vor (3.26).

Bew.: (i) Ist $w \in v + U$, d.h. $w = v + u$ für ein $u \in U$, so gilt $w - v = u \in U$, also $w \sim_U v$. Deshalb ist $v + U$ in der Äquivalenzklasse von v enthalten.
(ii) Ist $z \in V$ und $z \sim_U v$, so gilt $z - v =: u \in U$, also $z = v + u \in v + U$. Das zeigt, daß die Äquivalenzklasse von v in $v + U$ enthalten ist.

Es ist für das Folgende ganz wichtig, im Gedächtnis zu behalten, daß in der Darstellung einer Äquivalenzklasse in der Form $v + U$ das Element $v \in V$ nicht eindeutig bestimmt ist (es sei denn $U = \{0\}$), denn es gilt:

$$v + U = w + U \Leftrightarrow v \sim_U w \Leftrightarrow v - w \in U.$$

Man nennt jedes Element aus $v + U$ einen Repräsentanten der Äquivalenzklasse $v + U$.

Wir bezeichnen mit

$$V/U := \{v + U \mid v \in V\}$$

die Menge der Äquivalenzklassen von $\sim_U$ und mit

$$\pi : V \to V/U, \pi(v) := v + U$$

die "kanonische Projektion".

(7.17) Fakt: Es gibt genau eine K-Vektorraumstruktur auf der Menge V/U, so daß $\pi : V \to V/U$ ein Homomorphismus ist.

Bew.: Die Eindeutigkeit der K-Vektorraumstruktur folgt aus der Surjektivität von π. Denn sind $\alpha \in K$ und $v + U$, $w + U \in V/U$, so gilt $\pi(v) = v + U$, $\pi(w) = w + U$. Ist nun π ein Homomorphismus, so muß für das (noch zu definierende) Produkt $\alpha(v + U) \in V/U$ gelten:

$$\alpha(v + U) = \alpha\pi(v) \overset{\pi \in \mathrm{Hom}(V,V/U)}{=} \pi(\alpha v) = (\alpha v) + U.$$

Und ebenso:

$$(v + U) + (w + U) = \pi(v) + \pi(w) = \pi(v + w) = (v + w) + U.$$

Wenn π ein Homomorphismus werden soll, müssen wir also die Gleichungen

$$(*) \qquad \alpha(v+U) = (\alpha v) + U$$

und

$$(**) \qquad (v+U) + (w+U) = (v+w) + U$$

zur Definition der in den Gleichungen links stehenden Operationen verwenden. Es ist <u>nicht</u> klar, daß das möglich ist, denn es besteht die Gefahr, daß etwa in $(*)$ $v + U = v' + U$ gilt, aber $(\alpha v)+U \neq (\alpha v')+U$. Wir müssen zeigen, daß das nicht passieren kann. Man sagt dazu, wir müssen zeigen, daß die "Definition" $(*)$ unabhängig von der Wahl des Repräsentanten v von $v + U$ ist, und Analoges für $(**)$: aus $v + U = v' + U$ folgt $v - v' \in U$, und damit $\alpha(v - v') = \alpha v - \alpha v' \in U$, also $\alpha v \sim_U \alpha v'$ oder $(\alpha v) + U = (\alpha v') + U$. Aus $v + U = v' + U$ und $w + U = w' + U$ folgt $v - v' \in U$, $w - w' \in U$, und damit $(v - v') + (w - w') = (v + w) - (v' + w') \in U$, also $(v + w) \sim_U (v' + w')$ oder $(v + w) + U = (v' + w') + U$.

Das zeigt, daß wir $(*)$ und $(**)$ benützen können, um eine Multiplikation mit Skalaren ($\in K$) und eine Addition auf V/U zu definieren. Wir bemerken noch, daß wir beim Beweis der Repräsentantenunabhängigkeit von $(**)$ die Kommutativität der Addition in V benutzt haben. Wir werden später eine analoge Quotientenkonstruktion für Gruppen kennenlernen, und dabei tritt an der entsprechenden Stelle für nichtabelsche Gruppen ein Problem auf.

Nun sind natürlich noch die Vektorraumaxiome für V/U mit den durch $(*)$ und $(**)$ definierten Operationen nachzuprüfen. Das ist länglich, aber leicht. Wir bemerken noch, daß

$$U = \pi(0) = \pi(u) = u + U \qquad (\text{für alle } u \in U)$$

das 0-Element von V/U ist.

Bsp.: $V = \mathbb{R}^3$ und $U = \operatorname{span}\{(1,1,1)\} = \{(x,x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

$V/U =$ Menge der affinen Geraden, die parallel zu U sind.

$\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3/U$ ordnet einen Punkt $v \in \mathbb{R}^3$ die v enthaltende Gerade $v + U$ dieser Parallelschar zu. Da jede dieser Geraden $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ in genau einem Punkt trifft, ist $(\pi \mid \mathbb{R}^2 \times \{0\}) : \mathbb{R}^2 \times \{0\} \to \mathbb{R}^3/U$ ein bijektiver Homomorphismus, also ein Isomorphismus, d.h. die (durch $(**)$ definierte) Summe von zwei Geraden kann man wie folgt erhalten: Man bestimmt die Schnittpunkte der zwei Geraden mit $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ und erhält die "Summengerade" als die zu U parallele Gerade durch die Summe (in $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$) der Schnittpunkte. Es ist aber wichtiger die Struktur der Quotientenkonstruktion zu verstehen, als dieses explizite Beispiel.

Es ist nicht leicht zu erklären, warum diese Quotientenkonstruktion wichtig ist. Sie macht aus V ein vergröbertes Abbild V/U, in dem alles, was den Unterraum U betrifft, "vergessen" wird. Wir werden etwa in (7.19) sehen, daß zu jedem Homomorphismus $L \in \operatorname{Hom}(V, W)$ ein "natürlicher" Homomorphismus $\overline{L} : V/\ker L \to W$ mit $\overline{L} \circ \pi = L$ gehört, der injektiv ist. Es ist wichtig zu wissen, daß analoge Quotientenkonstruktionen für alle algebraischen

Strukturen (Gruppen, Ringe, Moduln) möglich und oft nützlich sind. Hier wird kurz noch der Fall einer (möglicherweise nichtabelschen) Gruppe $(G, \cdot)$ skizziert:

Ist H eine Untergruppe von G, so definiert

$$g_1 \sim_H g_2 \Leftrightarrow g_2^{-1} g_1 \in H$$

eine Äquivalenzrelation $\sim_H$ auf G, deren Äquivalenzklassen gerade die "Linksnebenklassen"

$$gH = \{gh \mid h \in H\}$$

von H sind. Man setzt wieder $G/H = \{gH \mid g \in G\}$ und $\pi : G \to G/H$, $\pi(g) = gH$. Versucht man nun, in Analogie zu (7.17), G/H so mit einer Gruppenstruktur zu versehen, daß π ein Homomorphismus wird, so kann man die (unangenehme) Überraschung erleben, daß das nicht geht: Man würde gern $(g_1 H) \circ (g_2 H)$ durch $(g_1 g_2)H$ definieren, aber es stellt sich heraus, daß (im nichtabelschen Fall) $(g_1 g_2)H$ sehr wohl von der Wahl der Repräsentanten g_1 von $g_1 H$ und g_2 vn $g_2 H$ abhängen kann, d.h. aus $g_1 H = g_1' H$ und $g_2 H = g_2' H$ folgt nicht notwendig $(g_1 g_2)H = (g_1' g_2')H$. Es ist nicht schwer einzusehen, daß das genau dann klappt, wenn für alle $g \in G$

$$gHg^{-1} = H$$

gilt, wobei $gHg^{-1} := \{ghg^{-1} \mid h \in H\}$. Untergruppen H mit dieser Eigenschaft heißen normal, und genau für solche normale Untergruppen H ist es möglich, auf G/H eine Gruppenstruktur zu definieren, so daß $\pi : G \to G/H$ homomorph ist. Ist G abelsch, so gilt natürlich $ghg^{-1} = gg^{-1}h = h$, und alle Untergruppen von G sind normal. Zu Beginn von Kapitel 2 haben wir (im Prinzip) auf diese Art aus $(G, \cdot) = (\mathbb{Z}, +)$ und einer Zahl $p \in \mathbb{N}$ die endliche zyklische Gruppe $(\mathbb{Z}_p, +)$ konstruiert: Als Untergruppe H nehmen wir

$$p\,\mathbb{Z} = \{n \in \mathbb{Z} \mid p \text{ teilt } n\}$$

und erhalten $\mathbb{Z}_p$ als $\mathbb{Z}/p\,\mathbb{Z}$.

Zurück zu den K-Vektorräumen V:

(7.18) Fakt: (i) Sind U und W komplementäre Untervektorräume von V, d.h. gilt $V = U \oplus W$, so ist $\pi|W : W \to V/U$ ein Isomorphismus.
(ii) Ist $\dim U < \infty$, so gilt $\dim(V/U) = \dim V - \dim U$.

Bew.: (i) Surjektivität von $\pi|W$: Sei $v + U$ ein beliebiges Element von V/U. Dann besitzt v eine (eindeutige) Darstellung als $v = u + w$ mit $u \in U$, $w \in W$. Wegen $\pi(u) = 0 \in V/U$ gilt: $v + U = \pi(v) = \pi(u + w) = \pi(u) + \pi(w) = \pi(w)$.

Injektivität von $\pi|W$: Sei $w \in W$ und $\pi(w) = 0 \in V/U$. Dann gilt $w + U = U$, d.h. $w \in U$. Also $w \in W \cap U$. Wir haben aber vorausgesetzt, daß $U \oplus W$ eine direkte Summe ist, d.h. daß $U \cap W = \{0\}$ gilt, vgl. (3.19). Also folgt aus $w \in W \cap U$, daß $w = 0$ gilt. Das zeigt $\ker(\pi|W) = \{0\}$, d.h. $\pi|W$ ist injektiv.

(ii) Nach (3.21) existiert ein zu U komplementärer Untervektorraum W von V, und es gilt $\dim U + \dim W = \dim V$. Nach (i) gilt $\dim W = \dim(V/U)$, und wegen $\dim U < \infty$ kann man die Gleichung auch als $\dim(V/U) = \dim W = \dim V - \dim U$ schreiben.

(7.19) Isomorphiesatz. *Zu* $L \in \mathrm{Hom}(V, W)$ *existiert genau ein Homomorphismus* $\overline{L} \in \mathrm{Hom}(V/\ker L, W)$*, für den* $L = \overline{L} \circ \pi$ *gilt.* $\overline{L}$ *ist injektiv und ein Isomorphismus von* $V/\ker L$ *auf* $\mathrm{im}\, L \subseteq W$*.*

Bem.: Ist $\dim(\ker L) < \infty$, so folgt aus der letzten Aussage, daß

$$\dim(\mathrm{im}\ L) = \dim(V/\ker L) \stackrel{(7.18)}{=} \dim V - \dim(\ker L)$$

gilt. Das ist ein nicht wirklich neuer Beweis des Dimensionssatzes (4.8).

Bew.: Da $\pi : V \to V/\ker L$ surjektiv ist, existiert höchstens eine Abbildung $\overline{L} : V|\ker L \to W$ mit $\overline{L} \circ \pi = L$. Wenn $\overline{L}$ existiert, muß $\overline{L}$ für alle $v + \ker L \in V/\ker L$ durch

$$(*) \qquad \overline{L}(v + \ker L) = \overline{L}(\pi(v)) = L(v)$$

gegeben sein und wegen $L|\ker L = 0$ ist $(*)$ in der Tat unabhängig von der Wahl des Repräsentanten der Äquivalenzklasse $v + \ker L$. Es gilt dann für alle $\alpha \in K$, $v_1 + \ker L \in V/\ker L$, $v_2 + \ker L \in V/\ker L$:

$$\begin{aligned}
\overline{L}(\alpha(v_1 + \ker L)) &= \overline{L}((\alpha v_1) + \ker L) = L(\alpha v_1) = \alpha L(v_1) \\
&= \alpha \overline{L}(v_1 + \ker L) \text{ und} \\
\overline{L}((v_1 + \ker L) + (v_2 + \ker L)) &= \overline{L}((v_1 + v_2) + \ker L) = L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2) \\
&= \overline{L}(v_1 + \ker L) + \overline{L}(v_2 + \ker L).
\end{aligned}$$

Das zeigt, daß $\overline{L} : V/\ker L \to W$ ein Homomorphismus ist. Ist $v + \ker L \in V/\ker L$ und gilt $\overline{L}(v + \ker L) = 0$, so folgt $L(v) = 0$, d.h. $v \in \ker L$ und damit $v + \ker L = 0 \in V/\ker L$. Das zeigt $\ker \overline{L} = \{0\}$, d.h. $\overline{L}$ ist injektiv. Da $\overline{L}(V/\ker L) = \overline{L}(\pi(V)) = L(V) =$ im L gilt, ist $\overline{L}$ als Abbildung von $V/\ker L$ nach im L auch surjektiv, also ein Isomorphismus von $V/\ker L$ auf im L.